有理ホモトピー論の紹介

鍛冶 静雄
京都大学理学研究科

1　導入

ある十分大きな空間のクラスの有理ホモトピー型とある種の比較的計算が簡単な代数との間に, 一対一の対応があるというのが有理ホモトピー論の基本となる定理. 以下では, この定理を記述するための準備, 定理のステートメント, 具体的な応用例, の順に進める.

2　準備

以下では代数は全て有理数体 $\mathbb{Q}$ 上,grading は非負整数とする.

Definition 2.1. *CDGA を Commutative Differential Graded Algebra, つまり,*

- $ab = (-1)^{|a||b|}ba$
- *degree +1 の graded derivation* d *で* $d^2 = 0$ *をもつ.*

とする. ここで,$|a|$ は a の次数.

Definition 2.2. ベクトル空間 V に対し, *commutative graded algebra* $\bigwedge V$ を,

$$\mathrm{Tensor}[V\text{ の }\textit{even generators}] \otimes \mathrm{Exterior}[V\text{ の }\textit{odd generators}]$$

で定義する. $\bigwedge V$ には *word length* による *filtration* $\bigwedge^{\geq i} V$ がはいる。

$(A, d) \in CDGA$ について,$(A, d) \hookrightarrow (A, d) \otimes (\bigwedge V, d)$ で, 次を満たすものを *KS-extension* と呼ぶ:V の *filtration*, $V = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i, V_0 \subset V_1 \subset \cdots$ があって,$d : V_i \to \bigwedge V_{i-1}$ を満たす.

$\mathbb{Q} \to (\bigwedge V, d)$ が *KS-extension* のとき,$(\bigwedge V, d)$ を *Sullivan algebra* とよぶ. また,$\mathrm{Im} d \subset \bigwedge^{\geq 2} V$ をみたす *Sullivan algebra* を *minimal model* とよぶ.

3　基本定理

ここでの基本群に関する仮定をはずした理論は ([THT]) を参照.

Lemma 3.1 ([BG]). *Connected($H^0(\ ) = 0$),augmented, of finite type($H^i(\ )$* が有限次元,$\forall i$*) CDGA* に*,weak equivalence* を *quasi-isomorphism, cofibration* を *KS-extension* と同型な射,*fibration* を全射とする *closed model category([Q])* の構造が入る. これを $CDGA^*$ であらわす.

Lemma 3.2. *Connected, nilpotent*[1]*,based, of finite type, CW-space* の *category* に*, weak equivalence* を $H^*(\ ;\mathbb{Q})$ に同型を誘導する写像*, fibration,cofibration* を通常のそれとして*,closed model category* の構造がはいる. これを CW^* であらわす.

Theorem 3.3 ([BG]). 次の *'*良い*'adjoint functors* があって*,*

$$A_{PL} : Top \rightleftarrows CDGA : |\cdot|,$$

それらはホモトピー圏の間の同値 $M : \mathrm{Ho}(CW^*) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(CDGA^*) : |\cdot|$ を誘導する.
また*,adjunction* $X \mapsto |M(X)|$ は *0-localization.*

$CDGA^*$ のホモトピー圏は,

$$\{\text{augmented Sullivan algebra/quasi isomorphism, homotopy class of maps }\}$$

と同値であり, さらにこれは,

$$\{\text{augmented minimal model/isomorphism, homotopy class of maps }\}$$

と同値である. つまり, ある種の CW space の有理ホモトピー型は minimal model の同型類と一対一対応がある.

Remark 3.4. *[Q] Connected differential graded Lie algebras* にもある *closed model category* の構造が入り*,1-connected based CW-spaces* との間にホモトピー圏の同値がある.

次に, 基本定理から導かれる幾つかの重要な性質をあげる.

Corollary 3.5. *1-connected based CW-space* X の *minimal model* $M(X)$ を $(\bigwedge V, d)$ とする.

- $V^i \cong \hom(\pi_i(X), \mathbb{Q})$.

[1] $\pi_1(\ )$ が nilpotent かつ $\pi_i(\ )\,(i \geq 2)$ が nilpotent $\pi_1(\ )$ 可群

- $d_1 = V \xrightarrow{d} \bigwedge V \longrightarrow \bigwedge V / \bigwedge^{\geq 3} V$ で定めるとき,

$$\langle d_1 v; x \wedge y \rangle = (-1)^{|x|+|y|+1} \langle v; [x, y] \rangle, \quad v \in V, x, y \in \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

  ここで $[x, y]$ は *Whitehead product* をあらす.

- *fibration* $\Leftrightarrow$ *KS-extension* の対応がある.

- X が *H-space* のとき $d = 0$.

いくつかの空間について,minimal model をあげておく. ここで右下の添字は degree をあらわす.

Example 3.6.
- $M(S^{2n+1}) = (\bigwedge e_{2n+1}, 0)$
- $M(S^{2n}) = (\bigwedge(e_{2n}, w_{4n-1}), dw = e^2)$
- $M(SU(n)) = (\bigwedge(x_3, x_5 \dots, x_{2n-1}), 0)$
- $M(\mathbb{C}P(n)) = (\bigwedge(x_2, w_{2n+1}), dw = x^{n+1})$
- $M(K(V, n)) = (\bigwedge V, 0)$

はじめの 4 つの例は cohomology 環の構造だけから簡単に計算できるが, 上の Corollary によって, その $\mathbb{Q}$-ホモトピー Lie 環の構造が分かる. 特に n 次球面のホモトピー群は $i \geq 2n$ で消えていることがわかるが, つぎの章ではこれの一般化をあげる.

逆に,Eilenberg-McLane 空間 $K(V, n)$ については, ホモトピー群から $\mathbb{Q}$-cohomology 環の構造が分かる.

4 Rationally elliptic space

応用例として rationally elliptic space のいくつかの性質を調べる. ここではトポロジーと代数を併用し有理ホモトピー論の利点を生かした証明を紹介する. 代数のみで証明している [FH] と見比べるとその利点がよくわかる.

Definition 4.1. *1-connected CW-complex* X が次の性質を満たすとき, *rationally elliptic space* であるという.

- $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$,
- $\dim H^*(X; \mathbb{Q}) < \infty$.

すなわち X の *minimal model* $(\bigwedge V, d)$ について,

- $\dim V < \infty$,

- $\mathrm{dim} H^*(\bigwedge V, d) < \infty$.

rationally elliptic space の例としては, S^n, 有限次元 H-space, 有限次元 Lie 群の等質空間, 底空間・ファイバーが rationally elliptic な fibration の全空間などがある.

Definition 4.2. *$f.dim(\bigwedge V, d)$ を $H^i(\bigwedge V, d) = 0, (i > n)$ なる最小の n とする.*

Lemma 4.3. *$(\bigwedge V, d)$ を rationally elliptic space の minimal model で,*

$$V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle, dv_i \in \bigwedge(v_1, \ldots, v_{i-1})$$

とする. 特に $dv_1 = 0$ である.
$(\bigwedge W, \bar{d}) = (\bigwedge(v_2, \ldots, v_k), \bar{d}) = (\bigwedge V, d)/(v_1)$ で定めるとき,

1. *$(\bigwedge W, \bar{d})$ は rationally elliptic,*

2. *$f.dim(\bigwedge W, \bar{d}) = \begin{cases} f.dim(\bigwedge V, d) + 2n - 1 & (|v| = 2n), \\ f.dim(\bigwedge V, d) - 2n - 1 & (|v| = 2n+1). \end{cases}$*

Proof. 1. 次の事実による. ここで $\mathrm{cat}_0(X)$ は X の 0-localization X_0 の LS-category をあらわす.

- $\mathrm{dim}\pi_*(\,) \otimes \mathbb{Q} < \infty$ のとき,

$$\mathrm{dim} H^*(\,) < \infty \Leftrightarrow \mathrm{cat}_0(\,) < \infty.$$

- $f : X \to Y, \quad \pi_*(f) \otimes \mathbb{Q}$:injective $\Rightarrow \mathrm{cat}_0 X \leq \mathrm{cat}_0 Y$.

これを, 射影 $(\bigwedge V, d) \to (\bigwedge W, \bar{d})$ に適用する.

2. $|v| = 2n$ の場合,

$$0 \longrightarrow (\bigwedge V, d) \xrightarrow{\wedge v} (\bigwedge V, d) \longrightarrow (\bigwedge W, \bar{d}) \longrightarrow 0,$$

に付随する long exact sequence

$$\cdots \to H^i(\bigwedge V, d) \to H^{i+2n}(\bigwedge V, d) \to H^{i+2n}(\bigwedge W, \bar{d}) \to H^{i+1}(\bigwedge V, d) \to \cdots$$

を見る.

$|v| = 2n - 1$ の場合も同様に,

$$0 \longrightarrow (\bigwedge W, \bar{d}) \xrightarrow{\wedge v} (\bigwedge V, d) \longrightarrow (\bigwedge W, \bar{d}) \longrightarrow 0,$$

に付随する long exact sequence を見る.

□

Definition 4.4. $\dim V < \infty$ なる *Sullivan algebra* $(\bigwedge V, d)$ に対し*,* $V = P \oplus Q, \quad P:$ *odd degrees,* $Q:$ *even degrees* として*,*

$$(\bigwedge V)^r_{-s} = (\bigwedge Q \otimes \bigwedge^s P)^{r-s},$$

$$F^r(\bigwedge V) = (\bigwedge V)^{\geq r}_*,$$

で *filtration* をいれ*,* それに付随する *spectral sequence*

$$(E_0, d_0) = (\bigwedge V, \delta) \Rightarrow H(\bigwedge V, d)$$

を *odd spectral sequence* という*.*

$P = \langle x_1, \ldots, x_p \rangle, Q = \langle y_1, \ldots, y_q \rangle$ とする.

Lemma 4.5. $(\bigwedge V, d)$*:elliptic* $\Leftrightarrow \mathbb{Q}[y_1, \ldots, y_q]/(\delta x_1, \ldots, \delta x_p)$*:finite dimensional.*

Proof. $(\Rightarrow)$: $\exists n, y_i^n \in (y_1, \ldots, y_{i-1}, \delta x_1, \ldots, \delta x_p)$ を i に関する帰納法で示せばよい.

Lemma 4.3 を繰り返し用いることで, $\bigwedge(y_i, \ldots, y_q, x_1, \ldots, x_p)$:elliptic がわかる. よって,

$$\exists n, \exists \Phi \in \bigwedge(y_i, \ldots, y_q, x_1, \ldots, x_p), y_i^n = \bar{d}\Phi.$$

ここで次数を考えると,$\Phi \in \bigwedge V \otimes P$ なので,

$$d\Phi = \sum g_j(y)\delta x_j + \Omega', \quad g_j(y) \in \bigwedge Q, \Omega' \in \bigwedge V \otimes P,$$

とかける. $f(y) \in \bigwedge Q, \Omega \in \bigwedge V \otimes P$ として,

$$\bar{d}\Phi = d\Phi + f(y) + \Omega$$

とかくと,

$$y_i^n = \sum g_j(y)\delta x_j + f(y) + \Omega + \Omega',$$

とかける. よって $\Omega + \Omega' = 0$ がわかる.

$(\Leftarrow)$: odd spectral sequence より. □

次にホモトピー群に関して著しい結果を挙げる.

Theorem 4.6. $|y_i| = 2a_i, |x_i| = 2b_i - 1, n = f.dim(\bigwedge V, d), \delta x_i = f_i(y_1, \ldots, y_q)$ とする*.*

1. $n = \sum^p (2b_i - 1) - \sum^q (2a_i - 1)$.
2. $\dim P \geq \dim Q$.
3. $n \geq \sum^q 2a_i$.
4. $2n - 1 \geq \sum^p (2b_i - 1)$.

Proof. 1. Lemma 4.3 から明らか.

2. Lemma 4.5 によって, $\dim \mathbb{Q}[y_1,\ldots,y_q]/(\delta x_1,\ldots,\delta x_p) < \infty$ より,$q \le p$.

3. $a_1 \ge \cdots \ge a_q, b_1 \ge \cdots \ge b_p$ と並び替えておく.

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\mathbb{Q}[y_1,\ldots,y_q]}{(\delta x_1,\ldots,\delta x_p)} & \to & \dfrac{\mathbb{Q}[y_1,\ldots,y_r]}{(f_1(y_1,\ldots,y_r,0,\ldots,0),\ldots,f_p(y_1,\ldots,y_r,0,\ldots,0))} \\ y_i & \mapsto & 0, \quad i > r. \end{array}$$

を考えると,Lemma 4.5 より, 少なくとも r 個の $f_i(y_1,\ldots,y_r,0,\ldots,0)$ は 0 でない. それらを $f_{j_1},\cdots,f_{j_r}, \quad j_r \ge r$ とする.

$$2b_r = |f_r| \ge |f_{j_r}| \ge 4a_r, \quad 1 \le r \le q,$$
$$n \ge \sum^q (2b_i - 1) - \sum^q (2a_i - 1) = \sum^q 2(b_i - a_i) \ge \sum^q 2a_i.$$

4.
$$n = \sum^p b_i + \sum^p (b_i - 1) - \sum^q (2a_i) \ge \sum^p b_i + \sum^q (b_i - 2a_i) \ge \sum^p b_i.$$

□

Euler 数 χ についても, 次のような結果がある.

Theorem 4.7. *1. $p > q \Rightarrow \chi = 0$.*

2. $p = q \Rightarrow \chi = \Pi b_i / \Pi a_i$.

Proof. 多項式を以下のように定義すると,

$$F(z) = \sum \lambda_r z^n, \quad \lambda_r = \sum (-1)^i \dim(\bigwedge V)^r_{-k}.$$

ここで明らかに次が成り立つ.

$$F(z) = \Pi^p (1 - z^{2b_i}) / \Pi^q (1 - z^{2a_i}).$$

よって,$F(1)$ が収束していれば,$\chi = F(1)$ がいえる.
$(\bigwedge V)^r_*$ が d-不変であることから, $\lambda_r = \chi_{H((\bigwedge V)^r_*,\delta)}$ となる.
よって,odd spectral sequence をもちいて上の結果を得る.

$$F(1) = \sum \lambda_r = \chi_{H(\bigwedge V,\delta)} = \chi_{H(E_0,d_0)} = \chi_{H(E_\infty,d_\infty)} = \chi_{H(\bigwedge V,d)} = \chi.$$

□

Remark 4.8. $p = q$ の時,$\lambda_r = \dim H^r(\bigwedge V, d)$ となることも示すことができる.

参考文献

[BG] A.K.Bousfield and V.K.A.M.Gugenheim: On PL de Rham theory and rational homotopy type. Memoirs of the Amer. Math. Soc. 179 (1976)

[FHT] Y.Félix, S.Halperin, J.Thomas: Rational Homotopy Theory. Graduate Texts in Math, 205, New York: Springer-Verlag 2001.

[Q] D.G.Quillen: Homotopical algebra. Lecture Notes in Math. 43, Springer-Verlag, 1967.

[Q] D.G.Quillen: Rational homotopy theory, Ann. of Math. 90(1969),205-295.

[FH] J.Friedlander, S.Halperin: An arithmetic characterization of the rational homotopy groups of certain spaces. Inventions Math. 53 (1979), 117-133.

[THT] A.Gómez-Tato, S.Halperin, D.Tanré: Rational homotopy theory for non-simply connected spaces, Trans. Amer. Math. 352(1999),1493-1525.