HOMOTOPY PULLBACK のコホモロジーについて

鍛冶 静雄

1. 謝辞

城崎新人セミナーには第 1 回から参加させていただいております. 前回は運営サイドにいたため, 慌しいままに過ぎ去ってしまった部分もありましたが, 今回はゆっくりと講演を聴き, 日本全国からの様々な分野の参加者の方と交流を持つ機会がありました. COE 代表の河野先生, 運営委員の皆様には, この場をお借りして, 御礼を申し上げたいとおもいます.

2. 導入

以下の話は, すべて基点付き空間の圏で考えるものとする.

fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ が与えられた時, fiber のコホモロジー $H^*(F)$ を調べる手段として, 以下で定義される cohomology suspension がある.

$$\begin{tikzcd}
 & H^{*-1}(F) \arrow[d, "\delta"] \\
H^*(B) \arrow[r, "p^*"] & H^*(E,F) \arrow[d] \\
 & H^*(E) \arrow[d, "i"] \\
 & H^*(F)
\end{tikzcd}$$

において, $\delta^{-1} \circ p^* : (p^*)^{-1}(\mathrm{im}\delta) \to H^{*-1}(F)/\ker\delta$.

本稿では, その類似をより一般に homotopy pullback diagram で考え, その具体的な応用例を示す.

homotopy pullback diagram

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & Y \arrow[d, "g"'] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

に対して, fibration の引き戻し

$$\begin{tikzcd}
\Omega B \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega B \arrow[d] \\
E' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "\Delta"'] \\
X \times Y \arrow[r, "f \times g"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

, Δ : diagonal

を考えると, E' と E は homotopy 同値になる. fibration $\Omega(B) \to B \to B \times B$ の連結写像 $\Omega(B) \times \Omega(B) \to \Omega(B)$ は, $(\gamma, \gamma') \mapsto (\gamma - \gamma')$ となるので, Puppe の完全系列,

$$\longrightarrow \pi_*(E) \xrightarrow{(i_1)_* \oplus (i_2)_*} \pi_*(X) \oplus \pi_*(Y) \xrightarrow{f_* - g_*} \pi_*(B) \longrightarrow \pi_{*-1}(E) \longrightarrow$$

が存在する.

そこで cohomology suspention の類似として次のようものを考える.

Proposition 2.1. π_1, π_2 を射影とするとき, 次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
H^*(B) \arrow[r, "\overline{\pi_2^*\circ g^* - \pi_1^*\circ f^*}"] \arrow[dr, "\pi_2^*\circ g^* - \pi_1^*\circ f^*"'] & H^*(X\times Y, E) \arrow[r, "\delta^{-1}"] \arrow[d] & H^{*-1}(E) \\
 & H^*(X\times Y) \arrow[d, "(i_1\times i_2)^*"'] & \\
 & H^*(E) &
\end{tikzcd}$$

は, $\mathcal{A}_p$ 構造を保つ準同型 $\sigma = \delta^{-1}\circ\overline{\pi_2^*\circ g^* - \pi_1^*\circ f^*} : \ker(\pi_2^*\circ g^* - \pi_1^*\circ f^*) \to \frac{H^{*-1}(E)}{\mathrm{im}((i_1\times i_2)^*)}$ を定義する.

3. 自由ループ空間

多様体上 M の区分的に可微分な閉道のなす多様体 LM のホモトピー型は, 連続写像全体の集合 $\{f : S^1 \to M\}$ にコンパクト開位相を入れたもの $\mathrm{Map}(S^1, M)$ と同型である. そこで, 一般の位相空間 X に対しても $LX = \mathrm{Map}(S^1, X)$ と定義する. このとき, 次は homotopy pullback diagram である.

$$\begin{tikzcd}
LX \arrow[r, "ev"] \arrow[d, "ev"'] & X \arrow[d, "\Delta"'] \\
X \arrow[r, "\Delta"] & X\times X
\end{tikzcd}, \quad ev : \text{evaluation at base point}$$

G をコンパクトリー群とするとき, ループ群 LG の分類空間 BLG は, LBG にホモトピー同値となる. ここでは BLG の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジーを決定するという問題を考える. 以下ではコホモロジーはすべて $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 係数 (p は奇素数) とする.

一般に LX のコホモロジーを計算する手段として, 上の図式に対する, Eilenberg-Moore スペクトル系列

$$E_2^{*,*} \simeq \mathrm{Tor}^{*,*}_{H^*(X)\otimes H^*(X)}(H^*(X), H^*(X)) \Rightarrow H^*(LX)$$

があり, これは [S2] などで調べられている. 一般に Eilenberg-Moore スペクトル系列には, Steenrod algebra $\mathcal{A}_p$ の構造が入る ([S1]) が, extension problem が残る. これに対し, LBG の場合に, [Ku] では module derivation を用いて extension problem がとかれ, また [KK] では, スペクトル系列を用いない幾何学的な方法で $H^*(LBG)$ の $\mathcal{A}_p$ 構造が調べらた.

ここでは, §2 で定義された σ をこの場合に適用することで, $H^*(BG)$ が多項式環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ のとき, $H^*(LBG)$ のコホモロジー環を調べる. 簡単な計算により, 上の diagram の Eilenberg-Moore スペクトル系列はこの場合 E_2 で collapse していることがわかる. ここで, $\mathcal{D}$ を次の写像の連結で定義する: $H^*(BG) \xrightarrow{\pi_1^*-\pi_2^*} H^*(BG)\otimes H^*(BG) \xrightarrow{\sigma} \frac{H^*(LBG)}{\mathrm{im}(ev^*)} = E_\infty$.

Proposition 3.1. $\mathrm{Tor}_{H^*(BG)\otimes H^*(BG)}(H^*(BG), H^*(BG)) = H^*(\bar{B}(H^*(BG); H^*(BG)\otimes H^*(BG); H^*(BG)))$ とみなす時,

$$\mathcal{D}' : H^*(BG) \to \mathrm{Tor}^{-1,*}_{H^*(BG)\otimes H^*(BG)}(H^*(BG), H^*(BG)) = E_2^{-1,*}(LBG), \quad x \mapsto [x\otimes 1 - 1\otimes x]$$

で定義される写像は derivation で, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

ここで, 定理を記述するためにいくつか記号を用意する. 次数付き不定元 x_i に対して,

- $\bigwedge(x_i)$ で, x_i 上の外積代数をあらわす.
- a_i に対して, sa_i を $|sa_i| = |a_i| - 1$ なる不定元とする.
- $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[a_i]\otimes\bigwedge(sa_i)$ 上の degree -1 derivation を $a_i \mapsto sa_i, \quad sa_i \mapsto 0$ で定義する.

これらの記号を用いると, 上の Proposition から次が言える.

Theorem 3.2. p を奇素数, $H^*(BG; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ とするとき,

$$H^*(LBG; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]\otimes\bigwedge(sx_1, \ldots, sx_n), \quad \theta(sx_i) = s\theta(x_i)$$

$H^*(BG)$ の $\mathcal{A}_p$ 構造はよく知られているので, 上の定理より $H^*(LBG; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ の $\mathcal{A}_p$ 構造がわかる.

4. 有限 Chevalley 群の分類空間

ここでもコホモロジーはすべて $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 係数 (p は奇素数) とする.

G を複素 reductive コンパクト Lie 群とする. $\phi^q : BG \to BG$ を q 次の unstable Adams operation とするとき, 次の事実をもちいて, Chevalley 群 $G(q)$ の分類空間のコホモロジーを決定することができる.

$(p, q) = 1$ とすると, 図式:
$$\begin{array}{ccc} BG(q) & \xrightarrow{i_1} & BG \\ {\scriptstyle i_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ BG & \xrightarrow{(1,f)} & BG \times BG \end{array}$$
は p-completion すると homotopy pullback diagram となる [Fr].

以下では, $q \bmod p \equiv 1$ かつ, $H^*(BG) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ の場合に $H^*(G(q))$ のコホモロジー環を $\mathcal{A}_p$ 構造も含めて決定する.

環構造については, 上の pullback diagram の Eilenberg-Moore スペクトル系列により, $H^*(G(q)) \simeq H^*(LBG) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \otimes \bigwedge(sx_1, \ldots, sx_n)$ となることは簡単な計算でわかる. しかし, ここでも自由ループ空間の場合と同様に, $\mathcal{A}_p$ 構造を調べるには一工夫必要である. 最近 [Ki] では, [KK] の方法を拡張することで, 幾何学的な構成を用いて $\mathcal{A}_p$ 構造を調べ, $\mathcal{A}_p$-algebra として, $H^*(G(q)) \simeq H^*(LBG)$ が同型であることを示されている.

ここでも §3 と全く並行に次が示される.

Theorem 4.1. p を奇素数, $q \bmod p \equiv 1$, $H^*(BG; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ とするとき, 次は $\mathcal{A}_p$-algebra の同型.
$$H^*(G(q)) \simeq H^*(LBG) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \otimes \bigwedge(sx_1, \ldots, sx_n), \quad \theta(sx_i) = s\theta(x_i)$$

References

[Fr] Friedlander, E., Etale Homotopy of Simplicial Schemes. *Ann. of Math. Studies*, **104** (1982) Princeton Univ. Press.

[Ki] Kishimoto, D., Cohomolofy of twisted loop spaces. *preprint.*

[KK] Kishimoto, D. and Kono, A., Cohomology of the classifying spaces of loop groups. *preprint.*

[Ku] Kuribayashi, K., Module derivations and the adjoint action of a finite loop space. *J. Math. Kyoto Univ.*, **39** (1999), 67–85.

[S1] Smith, L., On the Künneth theorem. I. The Eilenberg-Moore spectral sequence. *Math. Z.*, **116** (1970), 94–140.

[S2] Smith, L., On the charasteristic zero cohomology of the free loop space. *Quart. J. Math. Oxford Ser.(2)*, **33** (1982), 379–384.

京都大学理学研究科博士課程

E-mail address: `kaji@math.kyoto-u.ac.jp`