捩れ同変 K 群と射影表現

尾國 新一*
慶應義塾大学理工学部数理科学科 (JSPS PD)
鍛冶 静雄†
福岡大学理学部応用数学科
松岡 拓男‡
Department of Mathematics, Northwestern University

目次

* oguni@math.keio.ac.jp
† kaji@math.sci.fukuoka-u.ac.jp
‡ moto@math.northwestern.edu

1 イントロダクション

このノートにおける主目的は, コンパクトリー群の表現環からある捩れ同変 K 群への同型写像を cubic Dirac 作用素族を使って構成することである. これは, [11, 10, 9] に書かれているループ群に関する主定理のいわばトイモデルである ([10]).

もう少し詳しく書こう. このノートにおける主目的を定理の形で無理やり書くと次のようになる.

定理 1.1. $D_* : R^\tau(G) \cong K_G^{\sigma+\tau+\dim\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}^*)_{cpt}$.

簡単に記号の説明をする. G^τ はコンパクト群 G の $U(1)$ による中心拡大で, $R^\tau(G)$ は τ に関する G の射影表現群である. τ に関する G の有限次元射影表現とは G^τ の有限次元ユニタリー表現であって, $U(1) \subset G^\sigma$ がスカラーで作用するもののことである. これらの同型類全体は半群をなし, その群完備化を τ に関する G の射影表現群と呼んでいる (これは一般には環にならないが中心拡大を全部走らせて, 各々で射影表現群を考え, これらを全部直和すれば環になる). $\mathfrak{g}^*$ をコアジョイント作用によって G 空間とみなして, これのツイスト $\sigma+\tau$ によるコンパクト台を持つ捩れ同変 K 群が右辺である. 正確な説明は 2 章でなされるが, 定義は $K_G^{\sigma+\tau}(\mathfrak{g}^*)_{cpt} := \pi_0(C_c(\mathfrak{g}^*, \mathrm{Fred}'(H_{G,\sigma+\tau}))^G)$ である. この右辺を言葉で書くと, コンパクトリー環 $\mathfrak{g}$ の双対 $\mathfrak{g}^*$ をパラメータ空間とする $H_{G,\sigma+\tau}$ 上の Fredholm 作用素族で G 同変なものであって, コンパクト集合の外では可逆なものたちのなす空間のホモトピー類全体であるといえる. ここで, $H_{G,\sigma+\tau}$ は G のレベル $\sigma+\tau$ 射影表現であって, 普遍的なものである. また, D_* は射影表現 V に対して cubic Dirac 作用素族 $\{D_\mu(V)\}_{\mu\in\mathfrak{g}^*}$ を対応させる写像で, 詳細は 4 章で述べられるが, 簡単に言うと, 代数的な Dirac 作用素に cubic 形式のクリフォード作用を加えたものを $\mathfrak{g}^*$ の元で摂動したものである.

ここで, [11, 10, 9] のループ群に関する主定理について述べておこう (このノートでは 7 章でふれるだけで, 詳細は述べない). 彼らの主定理は, ループ群のレベル τ 射影可積分表現群が cubic Dirac 作用素族を使って, ある捩れ同変 K 群と同型となることを主張するものである. 実際には, より強いことを主張しているので, 定理の形で書いておこう.

定理 1.2. $D_* : R^\tau(LG) \cong K_G^{\sigma+\tau+\dim G}(G)$ が環として同型.

まず, 左辺であるが, これはループ群のレベル τ 射影可積分最低ウェイト表現群である. これはある積構造をもち, Verlinde ring と呼ばれるものである. 一方, 右辺は G を G の共役作用を持つ空間と思って, あるツイストによって得られる捩れ同変 K 群である (ツイストが何かについては 7 章を見よ). これには, 空間である G の群としての積を利用して定義される Pontrjagin 積が定まり, やはり環になる. この定理は, アーベル群としての同型であるだけでなく環として同型であるといっているので, Verlinde ring の積が Pontrjagin 積で理解できることを主張している.

これのトイモデルがコンパクト群に関して上に述べたものだというには, 彼らの主定理を $K_G^{\sigma+\tau}(G)$‘ $='$ ‘$K_{LG}^{\sigma+\tau+\dim G}(L\mathfrak{g}^*)'$ を使って言い換えておけばよいであろう (正確に言うためには, $L\mathfrak{g}^*$ ではなくて S^1 上の自明な G 主束 P のフラット接続全体 $\mathcal{A}_P$ に取り替える必要がある). また, 別のトイモデルとして, 有限群の場合を考えることもできる ([12] 参照). これは上記のような言いかえをしないバージョンのトイモデルである.

このノートの各章の内容を要約し, 参考文献を挙げよう.

2 章では, いわゆる位相 K 群が Fredholm 作用素を使って再定義されることを復習した後, 捩れ K 群の定義をする. ここで, K 群を捻るために使われるのは, 無限次元ユニタリー群を射影化して得られる群を構造群とする主束 (これをツイストと呼ぶ) であって, これは, $H^2(-, U(1))$ で分類される. また, コンパクト群による同変 K 群の復習及びその捩れバージョンの定義も行う. このツイストは $H_G^2(-, U(1))$ で分類されるが, この章では,

これよりも, やや広いクラスのツイストを考えている. さらに, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けを持つツイストによる捩れ (同変)K 群も扱う. このツイストは, $H^1(-,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times H^2(-,U(1))$ $(H^1_G(-,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times H^2_G(-,U(1)))$ で分類されるものである. なお, このノートでは K^0 に関することしか扱っていないことを注意しておく (K^1 群は捩れ K 群とみなすこともでき, その場合のツイストは, $H^0(-,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の生成元が与えている. よって, ツイストを分類する空間としては, $H^0_G(-,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times H^1_G(-,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times H^2_G(-,U(1))$ を考えるべきである). 基本的な文献は [3] である. また, より高い視点から捩れ K 群について書かれたものとして, [11] がある. この章であげられる [3] の意味でのツイストの例は, [11] の意味でのツイストを利用して与えられる.

3 章では, スピン加群やスピン表現の基本的なことをざっと復習した後, リー群及びリー環のスピン射影表現およびスピン中心拡大を定義し, この表現のウェイト分解について考察する. スピン射影表現およびスピン中心拡大という言葉遣いは一般的なものでないので, 簡単に説明しておく. 半単純な連結コンパクトリー群 G のコアジョイント表現を考える. これは, 特殊直交群を経由するので, この $U(1)$ による中心拡大であるスピン ^{c} 群を引き戻すことによって, G の中心拡大 G^σ が得られる. これをスピン中心拡大と呼ぶことにする. これは, 定義からスピン ^{c} 群を経由するので, スピン表現に作用している. 従って, G の射影表現が得られたことになり, これをスピン射影表現と呼ぶ. 参考文献は, [16, 10, 19].

4 章では Cubic Dirac 作用素族の定義およびその性質を調べる. 特に, スピン射影表現への作用を詳しく調べる. Cubic Dirac 作用素族はコンパクトリー環の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ をパラメータ空間とする Fredholm 作用素の族で, G の表現を与えるごとに決まるものであるのだが, 実はこれが可逆でないところ, すなわち, 台が, あるコアジョイント軌道になっており, 丁度 Kirillov 対応の逆になっていることを見る. ここで, Kirillov 対応といっているのは, 簡単に言うとコアジョイント軌道から表現を作る操作である. 参考文献は, [10].

5 章では, 前章までに得られたことを K 理論的に解釈する. 具体的には, コンパクト群の表現環がある捩れ同変 K 群と同一視されることをみるのだが, むしろこの同一視を与える写像を Cubic Dirac 作用素族を使って理解するところがこの章の主張である. 参考文献は, [10].

6 章では, スピン中心拡大や自明な中心拡大とは限らないものを扱い, Cubic Dirac 作用素族の定義を与える. 参考文献は, [10].

7 章では, ループ群についての Cubic Dirac 作用素族の定義を行うのだが, ここでは, より一般的な視点からの説明を試みるが詳細は述べない. 参考文献は, [17, 19, 10].

付録 A では, 2 章と異なる視点から捩れ K 群について考えている. 一つは, より素朴な視点, すなわち, ベクトル束の次に簡単なのは射影空間束だろうという立場で, もう一つは C^* 環にツイストのデータを押し付けて, その C^* 環の K 群として考えるというものである. 参考文献は, [3].

付録 B は, cubic Dirac 作用素と関係の深い非可換 Weil 代数について簡単にではあるが触れる. [15] および [16] を参考にしたが, 彼らが扱っているものとはやや異なる. 非可換 Weil 代数についての研究については, [1] を見よ.

付録 C では, Borel-Weil の定理は仮定して, Borel-Weil-Bott の定理を旗多様体のスピン構造を利用した証明を試みる. より代数的な立場からの証明は, [16] がある. これには, このノートとはやや異なる cubic Dirac 作用素についての説明が書いてある. Borel-Weil の定理に関しては, 例えば, [18] を見よ.

また, ここに挙げた以外に参考になるものとしては, [11, 10, 9] の主定理をテーマとして行われた研究集会 'Twisted K-Theory' に関するウェブ (`http://www.mfo.de/cgi-bin/tagung_espe?type=21&tnr=0641`) 上においてあるファイルがある.

ここで, このノートを読む際の注意を述べておく. 主な題材は [10] の前半であるが, 必ずしも記号あるいは符号などを一致させていないので, [10] と読み比べる際には注意が必要である (例えば, われわれの cubic Dirac 作用素は自己共役だが, 彼らのは反自己共役である). また, いくつかの証明は彼らのものと異なる方法で与えた. また, 彼らが省略したところにも証明をつけるようにしたつもりである. わかりやすくするため, そのようにし

たのだが, かえって間違いが増えたり, わかりにくくしてしまってはいないかという不安はあるが, 皆様の判断を仰ぎたい. それから, これはおそらく最も重要なことだが, このノートを書いた三人の中に表現論の専門家は一人もいないということである. このノートは, 2 章の前半を除いては, 表現論無しでは, 前に進めないものになっている. 表現論に関しての間違いや用語の使い方のまずさなどご指摘いただきたい. いずれにせよ, このノートを目にして, 興味をもたれた方や間違いを見つけられた方など, どんなことでもメールなどで知らせて頂ければ幸いである.

このノートは 2007 年の 12 月に滋賀県で行われた勉強会に基づくものである. このような勉強の機会をいただけたことを感謝する.

2 捻れ K 群と捻れ同変 K 群

この章では捻れ K 群と捻れ同変 K 群の定義について述べる.

2.1 K 群と捻れ K 群

まず, 通常の K 群について思い出す. コンパクト空間 X に対して, $K(X)$ を X 上の有限次元ベクトル束の同型類全体のなすモノイドの群完備化として得られるアーベル群とし, X の K 群と呼ぶ. ここで, モノイド構造はベクトル束の直和による. より具体的にいうと, $K(X)$ の元は X 上のベクトル束 V と W の形式差 $V - W$ と書かれ, $V - W = V' - W'$ が $K(X)$ の元として成り立つとは, ベクトル束として $V \oplus W'$ と $V' \oplus W$ が安定同型, すなわち, これらに共通のベクトル束を直和した後では同型である事を言う. ベクトル束 V と W の形式差 $V - W$ はバーチャルベクトル束と呼ばれることもある. これは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル束 $V \oplus W$ のことと思っても良い.

この節の目的は関手 K が捩れ K や捩れ同変 K にどのように一般化されるかを記述することである. このために, ひとまず K の別の記述, すなわちある (コンパクトではない) 空間により表現された関手としての記述を理解しておこう.

いくつか記号を準備する. H を (複素) ヒルベルト空間とし, それ上の Fredholm 作用素全体を $\mathrm{Fred} := \mathrm{Fred}(H)$ と書き, 位相は作用素ノルムで入れておく. H としては可分なもののみを考える. 従って無限次元であるような H はユニタリー同型を除いて一意であり、さらに、Kuiper の定理よりユニタリー同型全体のなす空間はノルム位相に関して可縮である. 特に $H \oplus H \simeq H$ であることを後で用いる. 位相空間 X と Y の間の連続写像のホモトピー類全体を $[X, Y]$ と書く.

Fred によって ‘表現’ される関手 $[-, \mathrm{Fred}]$(をコンパクト空間へ制限したもの) と K を同一視したい. まず, Fredholm 作用素の復習も兼ねて, 最も簡単な場合, すなわち, X が 1 点の場合を取り扱う. Fredholm 作用素とは, その像が閉であって, Ker 及び Coker が有限次元となる (有界) 作用素であった. このとき, その指数が $\mathrm{ind}\, F := \mathrm{dimKer}F - \mathrm{dimCoker}F$ で定義される. そして ind は, Fred において局所定数写像であり, さらに $\mathrm{ind}\colon \pi_0\mathrm{Fred} \to \mathbb{Z}$ がアーベル群としての同型を与えることがよく知られている. ここで, $\pi_0\mathrm{Fred}$ の群構造は, $H \oplus H$ と H の同一視を通して, Fredholm 作用素の直和 (これは $H \oplus H$ 上の作用素) を取る操作により定められている (ind がこの和を保つことは簡単に分かる). $\pi_0(\mathrm{Fred})$ の群演算に関する逆元は, 随伴作用素で与えられることが分かる. ところで, $\mathbb{Z}$ は 1 点上の K 群とみなせるが, このようにみなした場合, $\mathrm{ind}\, F$ は 1 点上の K 群の元としては, 1 点上のバーチャルベクトル束, すなわちバーチャルベクトル空間 $\mathrm{Ker}F - \mathrm{Coker}F$ である.

次に, 一般のコンパクト位相空間 X に対して, $[X, \mathrm{Fred}] \to K(X)$ を与えよう. ところで, $\mathrm{Fred}(H)$ 自身はコンパクトでないので, $K(\mathrm{Fred})$ は $\mathrm{Fred}(H)$ 上のバーチャルベクトル束の群とはみなせないので, ただちに $[X, \mathrm{Fred}] \to K(X)$ が定義されるわけではない. しかし, $\mathrm{Fred}(H)$ 上には, 関手 K の普遍元のような役割を果たす対象 Ind が構成でき, X から Fred への写像 f による Ind の引き戻しが X 上のバーチャルベクトル束を与

え, $[X, \mathrm{Fred}] \to K(X)$ なる写像が定義される．このことを少し説明しよう．まず Ind であるが, $F \in \mathrm{Fred}$ 上に, バーチャルベクトル空間 $\mathrm{Ker}F - \mathrm{Coker}F$ を乗せたものだと思ってよい (もう少し真っ当な定義は, 以下から類推できると思うので書かない). 残念ながら, これは本当のバーチャルベクトル束ではないし, 局所的に見ても違う ($\mathrm{ind}\, F$ は局所定数だったが, $\mathrm{dimKer}F$ は変わりうる). しかし, 空間 Fred はある開集合族による filtration を持ち、それらの開集合合においては各点で $\mathrm{Ker}F - \mathrm{Coker}F$ に自明なバーチャルベクトル空間 (すなわち, $V - V$ の形のもの) を加えてやることで, バーチャルベクトル束に取り替えることができ, X の像 $f(X)$ を含むところで, そのようにしておけば, 引き戻して, バーチャルベクトル束をえるには十分である．これを $K(X)$ の元と見たものを $f^*\mathrm{Ind}$ と定義する (もちろん, well-defined 性を確認する必要がある).

定理 2.1. (Jänich, Atiyah) コンパクト空間 X に対して, 次の自然な同型を持つ.

$$[X, \mathrm{Fred}(H)] \to K(X).$$

$\pi_0\mathrm{Fred}$ の群構造は, $\mathrm{Fred}(H)$ 上の up-to-homotopy での群構造, すなわち, 位相空間のホモトピー圏における $\mathrm{Fred}(H)$ 上の群構造から来るものと思えた．従って, $[X, \mathrm{Fred}]$ 上には自然な群構造が入り, 上の同型はアーベル群としての同型を意味する．もう少し素朴に言うと, $H \oplus H$ と H の同一視を使ってアーベル群の構造を入れるといっても良い.

次に, 捩れ K 群について書こう．コンパクト空間 X の K 群については, X から $\mathrm{Fred}(H)$ へのホモトピー類全体のなす集合に自然なアーベル群の構造を入れたものと理解できる事を見た．ここで定義される捩れ K 群は簡単に言うと, X 上のファイバー束であってファイバーが $\mathrm{Fred}(H)$ となっているものを考え (これが '捩れ' にあたる), その切断のホモトピー類全体にアーベル群の構造を入れたものである．構造群の $\mathrm{Fred}(H)$ への作用が $\mathrm{Fred}(H)$ の up to homotopy での群構造を保っていれば, 切断のホモトピー類にもアーベル群の構造が入るということである．特に通常の $K(X)$ は, 考える X 上のファイバー束が自明な場合に他ならない. '捩れ' のうちでも特に役立つのは別の興味ある幾何学的対象とつながりのあるものであり, それらを含む扱いやすいクラスを考察するのが有効である (付録 A 参照).

そのような '捩れ' のクラスとして *projective Hilbert bundle* に付随する Fred-束を考える. $U(H)$ の共役による $\mathrm{Fred}(H)$ への作用は $PU(H) = U(H)/U(1)$ の作用に落ちる事を注意しておく．ここで考える Fred-束は, X 上の $PU(H)$ 主束 P を用いて, $P \times_{PU(H)} \mathrm{Fred}$ と書けるもので, P がツイストと呼ばれる．Kuiper の定理によって $U(H)$ が可縮であることがよく知られており, 従って $PU(H) \simeq BU(1) \simeq K(\mathbb{Z}, 2)$ である．よって, このようなツイストの同型類は, 代数的トポロジーの観点から

$$[X, BPU(H)] = [X, K(\mathbb{Z}, 3)] = H^3(X, \mathbb{Z}) = H^2(X, U(1))$$

によって分類される．ここで一つ注意を与えておく．それは, このコホモロジー類だけから捩れ K 群がカノニカルに決まるわけではないということである．ツイストの間の同型はそれぞれのツイストに対応する捩れ K 群の間の同型を誘導するが, ツイスト間の同型が変われば誘導される同型も変わりうるからである.

ここでテクニカルな問題を取り扱う．今までは, $\mathrm{Fred}(H)$ や $U(H)$ および $PU(H)$ 上の位相は作用素ノルムによるものを考えてきた．しかしながら, $U(H)$ のノルム位相を考えていると, 後で同変 K を扱うときに不都合である. $U(H)$ にはコンパクト開位相を入れて考えよう．同変 K を扱わなくても除外されてしまい不都合となるツイストの例については Atiyah-Segal[3] 第 2 節 295 ページを見よ．このとき, $U(H)$ はやはり可縮である．ところで, この位相を使うと, $\mathrm{Fred}(H)$ への $U(H)$ の作用が連続にならないので, $\mathrm{Fred}(H)$ の位相も変える必要がある．しかしながら, $\mathrm{Fred}(H)$ にコンパクト開位相を入れると, これは可縮になってしまう．そこで, Atiyah and Segal [3] に従って, $\mathrm{Fred}(H)$ 自体を適切なものに取り替えて考えることにする．Fredholm 作用素 A に対して, Fredholm 作用素 B であって, $AB - 1$ 及び $BA - 1$ がコンパクト作用素になるもの, すなわちパラメトリックスが取れることに注意しよう.

定義 2.2. $\mathrm{Fred}' = \mathrm{Fred}'(H)$ を Fledholm 作用素の組 (A, B) であって, 互いのパラメトリックスになっているもの全体のなす集合とする. このとき, $(A, B) \mapsto (A, B, AB-1, BA-1)$ という埋め込み $\mathrm{Fred} \to \mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ によって Fred' に位相を入れる. ただし, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ は有界作用素全体のなす集合でコンパクト開位相を入れ, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$ はコンパクト作用素全体のなす集合でノルム位相を入れている.

このとき, Fred' はコンパクト空間の K 群を表現する空間であり, かつ, コンパクト開位相を持つ $U(H)$ の Fred' への共役による作用は連続である ([3] Proposition 3.1). 今, 捩れ K 群の定義が次で与えられる.

定義 2.3. コンパクト空間 X 上の $PU(H)$ 主束 P が与えられたとき, X の P による捩れ K 群を次のように定義する.

$$K^P(X) = \pi_0\Gamma(X, P \times_{PU(H)} \mathrm{Fred}') = [P, \mathrm{Fred}']^{PU(H)}.$$

ここで, $\Gamma(-,-)$ は切断の空間をあらわし, $[-,-]^{PU(H)}$ は $PU(H)$ 同変写像のホモトピー類のなす集合をあらわす.

2.2 同変 K 群と捻れ同変 K 群

まず, 同変 K 群の定義を思い出そう.

普遍ユニタリー表現 H_G とはすべての有限次元ユニタリー表現を直和因子としてもつことを言う. これは同型を除いて, 一意に存在し, 例えば, $H_G := L^2(G) \otimes H$ と取れる (Peter-Weyl の定理). ここで, H は無限次元ヒルベルト空間であって, $L^2(G)$ は右正則表現とみなしている. このとき, 一意性から $H_G \cong H_G \oplus H_G$ である.

このとき G 同変 K 群の定義がつぎで与えられる.

定義 2.4. $K_G(X) := [X, \mathrm{Fred}'(H_G)]^G$.

$H_G \cong H_G \oplus H_G$ があったので, これによりアーベル群の構造が $K_G(X)$ に入る.

次に, 捩れ同変 K 群を扱う.

H は無限次元ヒルベルト空間であって, $H \cong H \oplus H$ を一つとる. このとき, $U(H) \to U(H) \times U(H) \subset U(H\oplus H) \cong U(H)$ は中心 $U(1)$ を保つので, 射影化に対しても $PU(H) \to P(U(H)\times U(H)) \subset PU(H\oplus H) \cong PU(H)$ があることを注意しておく.

X を G 空間とする. G 同変 $PU(H)$ 束 P であって, 安定なものをここでは, G 同変ツイストと呼ぶ. ここで, $PU(H)$ 束 P の構造群を $PU(H) \to P(U(H) \times U(H)) \subset PU(H \oplus H) \cong PU(H)$ で拡大したもの P" がもとの P と G 同変 $PU(H)$ 束として同型のとき, これは安定であるという. 通常, $H^3_G(X) := H^3((X \times EG)/G)$ で分類される G 同変 $PU(H)$ 束が G 同変ツイストと呼ばれ, これは安定なだけでなく, より強い性質を持つのだがここでは特に気にしないことにする.

さて, 今, P による X 上の捩れ G 同変 K 群が次で定義される.

定義 2.5. $K^P_G(X) := \pi_0(\Gamma(X, P \times_{PU(H)} \mathrm{Fred}'(H))^G)$.

これには, P の安定性からアーベル群の構造が入る.

G 同変ツイストの例を挙げる. G のレベル τ の安定な射影表現 V を考える. すなわち, V は G の $U(1)$ による中心拡大 G^τ のユニタリー表現であって, 中心 $U(1)$ はスカラー倍で作用しており, $V \cong V \oplus V$ が G の射影表現として成り立っているとする (特に V は無限次元). そこで, $P_V := X \times PU(V)$ を自明な $PU(V)$ 主束とし, G を対角に作用させると, G 同変ツイストになっている. このとき, これに付随した捩れ G 同変 K 群は

$$K^{P_V}_G(X) = \pi_0(\Gamma(X, P_V \times_{PU(V)} \mathrm{Fred}'(V))^G) = [X, \mathrm{Fred}'(V)]^G$$

となる. 特に V としてレベル τ の普遍射影表現 $H_{G,\tau}$ をとった場合が次章以降で現れ, これを $K^\tau_G(X)$ と書く

($X=\mathfrak{g}^*$ で G のコアジョイント作用を持つものを扱う．ただし，この空間はノンコンパクトなのでコンパクト台を持つ捩れ同変 K 群を考えている，さらに，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けのある場合にも使える記述で書くので，それについては次節を参照せよ)．また，G の中心拡大として，自明なもの $G^o := G\times U(1)$ を考えたときには，$H_{G,o}=H_G$ だから，捩れのない G 同変 K 群が現れる，すなわち，$K_G(X)=K_G^o(X)$ である．

レベル τ の普遍射影表現について説明しておく．G の中心拡大 τ が与えられたとする．このときレベル τ の普遍射影表現 $H_{G,\tau}$ が同型を除いてただ一つ存在する．ここで普遍といっているのは，すべてのレベル τ 有限次元射影表現は普遍射影表現 $H_{G,\tau}$ の直和因子として現れることを言う．構成は次のようにすれば良い．まず，G の有限次元既約射影表現の同型類全体のなす集合を $\widehat{(G,\tau)}$ と書く．これは，G^τ の有限次元既約ユニタリー表現の同型類全体のなす集合 $\widehat{G^\tau}$ の部分集合である．そこで，$H_{G,\tau} := \bigoplus_{V\in\widehat{(G,\tau)}} V\otimes H$ とすると，これは明らかに普遍射影表現になっている．ここで，H は無限次元ヒルベルト空間である．このとき，$H\cong H\oplus H$ から $H_{G,\tau}\cong H_{G,\tau}\oplus H_{G,\tau}$ である，すなわち安定である．簡単な例を挙げる．τ が自明 ($\tau=o$ と書く)，すなわち，$G^o:=G\times U(1)$ の場合には，$\widehat{(G,o)}=\widehat{G}$ となっているので，$H_{G,o}=H_G$ である．G のレベル τ 普遍射影表現 $H_{G,\tau}$ の構成をもう一つ与えておこう．G の普遍表現 H_G のモデルとして $L^2(G)\otimes H$ が取れたことに注意しよう (Peter-Weyl の定理)．ここで，$f\in L^2(G)$ には，$(R_gf)(h):=f(hg)$ で $g\in G$ が作用している．そこで，G のレベル τ に対しても，$L^2(G)$ に当たるものを考えればよい．実際，$L^2(G^\tau)$ の部分空間で考えてよいので，$f\in L^2(G^\tau)$ であって，任意の $\lambda\in U(1)$ に対して $(R_\lambda f)(g)=\lambda g$ を満たすもの全体のなす部分空間を取ればよい．ここで，右辺は $\lambda\in U(1)\subset\mathbb{C}$ によるスカラー倍である．この空間は，$U(1)\subset\mathbb{C}$ によるスカラー倍を使って，作られる G 上の直線束 $G^\tau\times_{U(1)}\mathbb{C}$ の L^2 切断全体ということもできる．よって，これに無限次元ヒルベルト空間 H をテンソルしたものが G のレベル τ 普遍射影表現 $H_{G,\tau}$ となる．

もう一つ同変ツイストの例を挙げておこう．次の組を考える．

$$(\mathcal{P}\to X,\mathcal{G}^\tau).$$

ここで，$\mathcal{G}$ は位相群で，$\mathcal{P}$ に作用しており，$1\to\mathcal{N}\to\mathcal{G}\to G\to 1$ があって，$\mathcal{P}\to X$ は $\mathcal{G}$ 同変な $\mathcal{N}$ 主束である．また，$\mathcal{G}^\tau$ は $\mathcal{G}$ の $U(1)$ による中心拡大である．さらに，V なる $\mathcal{G}$ のレベル τ 安定射影表現を固定しよう．このとき，同変ツイストが次のように定義できる．$P_V=\mathcal{P}\times_{\mathcal{N}}PU(V)$ このとき $K_G^{P_V}(X)$ は，$\pi_0(\Gamma(X,P_V\times_{PU(V)}\mathrm{Fred}'(V))^G)=\pi_0(\Gamma(X,\mathcal{P}\times_{\mathcal{N}}\mathrm{Fred}'(V))^G)=[\mathcal{P},\mathrm{Fred}'(V)]^{\mathcal{G}}$ である．ここで，P_V への $\mathcal{G}$ の作用は対角であることを注意しておく．$\mathcal{N}$ が正規だから well-definedness は良い．もし，V としてレベル τ の‘普遍射影表現 $H_{\mathcal{G},\tau}$’ が取れれば，さっきの同変ツイストの例のように ‘$K_{\mathcal{G}}^\tau(\mathcal{P})$’ と書いても良いだろう．しかし，$\mathcal{G}$ がコンパクトでないので，レベル τ の ‘普遍射影表現 $H_{\mathcal{G},\tau}$’ がどのようなものとするべきかは定かではない．一方で，$\mathcal{P}\rtimes\mathcal{G}$ が $X\rtimes G$ は位相亜群として局所同値となっている場合には，コンパクト群 G と関連がついて，‘$K_{\mathcal{G}}^\tau(\mathcal{P})$’ なる記述は正当化されるが，ここでは深入りしないが一言だけ述べておく．[10] によるツイストの定義 (FHT 同変ツイストと呼ぼう) は，上記の組 $(\mathcal{P}\to X,\mathcal{G}^\tau)$ であって，$\mathcal{P}\rtimes\mathcal{G}$ と $X\rtimes G$ は位相亜群として局所同値となっているものとしていることを注意しておく．より一般的な話が [11] に書かれているので参照されたい．

この構成法で理解できる例を一つ与える．FHT 同変ツイストとして，$(\mathcal{P}:=G\to X:=G/T,\mathcal{G}^\tau:=G\times T^{op,\tau})$ をとる．ここで，T^{op} は T のオポジット群で，$X=T^{op}\backslash G^{op}$ とみなせることから来ている．このとき，X 上の捩れ G 同変ツイスト $P:=G\times_T PU(H_{G\times T^{op},\tau})$ が得られ，これに付随する捩れ K 群は $K_G^P(X)=\pi_0(\Gamma(X,G\times_T\mathrm{Fred}'(H_{G\times T^{op},\tau}))^G)=[G,\mathrm{Fred}'(H_{G\times T^{op},\tau})]^{G\times T^{op}}$ と書ける．

ループ群と関連した FHT 同変ツイストの例を 7 章の最後に書いたので参照せよ．

2.3 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数を考慮に入れた捩れ K 群の定義

ここでは，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数を考慮に入れた捩れ (同変)K 群の定義を取り扱おう．

定義 2.6. $\mathbb{Z}/2$ 次数つきヒルベルト空間 $\hat{H}$ に対して，$\mathrm{Fred}^{(0)}=\mathrm{Fred}^{(0)}(\hat{H})$ を次数 1 の自己共役作用素で

ある Fredholm 作用素 $\hat{A}$ であって, $\hat{A}^2-1$ がコンパクトになるもの全体のなす集合とする. その位相を $A \mapsto (\hat{A}, \hat{A}^2-1)$ という埋め込み写像 $\mathrm{Fred}^{(0)} \to \mathcal{B}(\hat{H}) \times \mathcal{K}(\hat{H})$ によって入れる. ここで $\mathcal{B}(\hat{H})$ にはコンパクト開位相, $\mathcal{K}(\hat{H})$ にはノルム位相が入れてある.

$\mathrm{Fred}'(H)$ の元 (A,B) を $\mathrm{Fred}^{(0)}$ の元とみなすには,

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & |B|A \\ A^*|B| & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば良い. ($|B|$ は $|B|^2 = B^*B$ を満たす self-adjoint 正の作用素.)

以下, $\hat{H} = H_0 \oplus H_1$ を $Z/2Z$ 次数つきヒルベルト空間とする (H_0 と H_1 は加算無限次元ヒルベルト空間). $\hat{H}$ の次数付けを忘れたとき H と書く. $H \cong H_0$ 及び $H \cong H_1$ を同一視することがある. すると, $H_0 \cong H_1$ や $H \cong H \oplus H$ 等も同一視される.

[群論の準備]

H_i と H_{i+1} を入れ替える写像で 2 乗して identity になるものを $k \in U(\hat{H})$ と書く ($H_0 \cong H_1$ を一つ取ればよい). すると, k は $U(H_0) \times U(H_1)$ に inner-auto で作用でき, それは $U(H_0)$ と $U(H_1)$ を入れ替える作用とも言える (k で H_0 と H_1 を同一視するならば). この作用により, $(U(H_0) \times U(H_1)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が定まる. これは, $U(\hat{H})$ に埋め込まれる. 実際, $U(H_0) \times U(H_1)$ の元を対角に入れたもの u と, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元を k にうつしたものをそのまま掛けて uk として $U(\hat{H})$ にうつせばよい (これは準同型になっている). 今, 次の短完全列が書ける.

$$1 \to U(H_0) \times U(H_1) \to (U(H_0) \times U(H_1)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

$U(H_0) \times U(H_1)$ や $(U(H_0) \times U(H_1)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は $U(\hat{H})$ と中心 $U(1)$ を共有していることに注意してやると, これを射影化しても, すなわち $U(1)$ でわっても, 次が成り立つ.

$$1 \to P(U(H_0) \times U(H_1)) \to P((U(H_0) \times U(H_1)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$$

ここで, $P((U(H_0) \times U(H_1)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (P(U(H_0) \times U(H_1)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることを注意しておく. この群を $PU(\hat{H})$ の部分群とみなして, $Q(\hat{H})$ と書く. $U(\hat{H})$ の部分群であって, $U(H_0) \times U(H_1)$ 及び $U(H_0, H_1) \times U(H_1 \times H_0)$($H_i$ を H_{i+1} に移す元全体) で生成されるものを射影化したものは $Q(\hat{H})$ に他ならないことを注意しておく.

[ツイストの二つの同値な定義]

ツイストの二つの同値な定義を与える. $H^3(X, U(1)) \times H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つきの) ツイストを分類することが知られているので, ツイストとは $PU(H)$ 主束と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ カヴァリングの組 $(P, \tilde{X})$ となる. これが一つ目の定義であるが, 少し言い換えておく. 任意の $PU(H)$ 主束 P は, $P((U(H_0) \times U(H_1))$ 主束 P' に簡約化できる. まず構成を書こう. $U(H)$ は $U(H \oplus H)$ に対角作用でに埋め込め, 中心 $U(1)$ は保たれるので, $PU(H) \subset PU(H \oplus H) \cong PU(H_0 \oplus H_1)$ である ($H \cong H_0 \cong H_1$ を使った). これによって, 与えられた P の構造群を拡大したものを P' とする. P' から P が復元できることを見る. $P((U(H_0) \times U(H_1)) \subset PU(H_0 \oplus H_1)$ を使って, P' の構造群を拡大したものを P" と書くと, これは, $H \cong H_0 \oplus H_1$ より $PU(H)$ 主束とみなせる. P および P" を貼りあわせで書く際のコサイクル条件が同じであることから, これらは同型である (H が無限次元であることも必要だった). 逆に, 任意の $P((U(H_0) \times U(H_1))$ 主束 P' が $PU(H)$ 主束 P に簡約化できることも同じようにして示される. したがって, 一つ目の定義におけるツイストとは, $P(U(H_0) \times U(H_1))$ 主束と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ カヴァリングの組 $(P', \tilde{X})$ と言える.

二つ目の定義を与える. ツイストとは, $Q(\hat{H})$ 主束 Q のことである.

二つの定義の同値性を示そう. Q から $(P, \tilde{X})$ は次のように作る. $\tilde{X} := Q/P(U(H_0) \times U(H_1))$ と定義する. ここで, $P(U(H_0) \times U(H_1))$ が $Q(\hat{H})$ の正規部分群であったことを使っている. $PU(H)$ 主束 P は Q の構造群を $Q(\hat{H}) \subset PU(H)$ で拡大することで作れる (H は $\hat{H}$ の次数付けを忘れたもの). 次に逆を考える, す

なわち, $(P', \tilde{X})$ から Q を作ろう. P' の構造群を $P(U(H_0) \times U(H_1)) \to Q(\hat{H})$ で拡大したものを Q' と書く. $\tilde{X} \times Q'$ は $X \times X$ 上の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times Q(\hat{H})$ 主束で, 対角に制限して X 上の主束が得られる. この主束の構造群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times Q(\hat{H})$ だったので, 対角に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が埋め込めて, これで主束を割ると, 構造群 $Q(\hat{H})$ の主束が得られ, これを Q と定義する. 以上の構成が可逆な操作であることは, きちんと書けば確かめられる.

[捩れ K 群の定義]
まず, $Q(\hat{H})$ が $\mathrm{Fred}^0(\hat{H})$ に自然に作用できることを見る. $Q(\hat{H})$ は射影化する前は $(U(H_0) \times U(H_1)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ だったので, これのアジョイント作用がどうなるかを見ればよい. この群は $U(\hat{H})$ の部分群だと思えたので, $\hat{H}$ には作用している. $U(H_0) \times U(H_1)$ はアジョイントで $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けを保つ. 一方, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けをひっくり返す作用である. しかし, どちらにせよ, これらはユニタリー作用だから, $\mathrm{Fred}^0(\hat{H})$ を保つことは明らかである. X 上の $Q \times_{Q(\hat{H})} \mathrm{Fred}^0(\hat{H})$ の切断のホモトピー類全体として $K^Q(X)$ を定義する.

[$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数を考慮しなかった捩れ K 群の定義との対応]
まず, ツイスト P が P' に置き換えられることは見た. この構造群を拡大することで, Q' なる $Q(\hat{H})$ 主束が定まるが, $\tilde{X}$ が自明, すなわち, $\tilde{X} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の場合を考えるので, $Q = Q'$ ととる. この Q に関して $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数を考慮した捩れ K 群 $K^Q(X)$ が, $K^P(X)$ に同型であることを言えばよい. これは, $P \times_{PU(H)} \mathrm{Fred}^0(\hat{H}) = P' \times_{P(U(H_0) \times U(H_1))} \mathrm{Fred}^0(\hat{H}) = Q \times_{Q(\hat{H})} \mathrm{Fred}^0(\hat{H})$ より明らかである. ここで, $PU(H)$ の $\mathrm{Fred}^0(\hat{H})$ への作用は, $PU(H) \subset PU(H \oplus H) \cong PU(H_0 \oplus H_1)$ を経由している.

[同変の場合]
G 空間 X を考える. このとき G 同変ツイストとは, G 同変な $Q(\hat{H})$ 主束 Q のことである. これを $P(U(H_0) \times U(H_1))$ で割って得られる $\tilde{X}$ はやはり G 同変で, Q の構造群を $Q(\hat{H}) \subset PU(H)$ で拡大することで作られる $PU(H)$ 主束 P も G 同変である. よって, $(P, \tilde{X})$ なる G 同変な組が得られる. 逆にこの組が与えられると, やはり G 同変な Q が得られるので, $(P, \tilde{X})$ を G 同変ツイストと考えても良い. このとき捩れ G 同変 K 群 $K_G^Q(X)$ が $\Gamma(X, Q \times_{Q(\hat{H})} \mathrm{Fred}^0((\hat{}H)))$ の G 同変ホモトピー類の全体として定義される.

[例]
簡単な例を挙げる. $\epsilon : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のレベル τ の安定 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 射影表現 $\hat{V} = V_0 \oplus V_1$ を考える. すなわち, V_i は $G_0 := \mathrm{Ker}\epsilon$ 射影表現で, $G \setminus G_0$ は V_i を V_{i+1} に射影的に作用している. さらに言い換えると, $G \to Q(\hat{V})$ であって, $\epsilon : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と $\epsilon : Q(\hat{V}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が整合的であるといっても良い. そこで, $Q_{\hat{V}} := X \times Q(\hat{V})$ を自明な $Q(\hat{V})$ 主束とし, G を対角に作用させると, G 同変ツイストになっている. このとき,

$$K_G^Q(X) = \pi_0(\Gamma(X, Q \times_{Q(\hat{V})} \mathrm{Fred}^0(\hat{V}))^G) = [X, \mathrm{Fred}^0(\hat{V})]^G$$

となる. 特に $\hat{V}$ としてレベル τ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 普遍射影表現 $\hat{H}_{G,\tau}$ をとった場合が次章以降で現れる. また, G の中心拡大として, 自明なもの G^o を考えたときには, $\hat{H}_{G,o} = \hat{H}_G$ だから捩れのない $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けを考慮した G 同変 K 群が現れる.

次数付けのある FHT 同変ツイスト $(\mathcal{P} \to X, \mathcal{G}^\tau, \epsilon^\tau)$ から例を作ることもやはり可能であるが省略するが, この組の定義だけ書いておく. ここで, $\mathcal{G}$ は位相群で, $\mathcal{P}$ に作用しており, $1 \to \mathcal{N} \to \mathcal{G} \to G \to 1$ があって, $\mathcal{P} \to X$ は $\mathcal{G}$ 同変な $\mathcal{N}$ 主束である. また, $\mathcal{G}^\tau$ は中心拡大で, $\epsilon^\tau : \mathcal{G} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は次数付けを与える準同型である. さらに, $\mathcal{P} \rtimes \mathcal{G}$ と $X \rtimes G$ は位相亜群として局所同値である.

3 スピン中心拡大とスピン射影表現

この節ではスピン射影表現を扱う.

3.1 スピン加群とスピン表現

ここではスピン加群あるいはスピン表現とは何であったかを思い出す (証明などはつけないが, 本文で必要となる範囲で説明する). スピン加群あるいはスピン表現は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けを考慮に入れるかや, クリフォード加群と見るのか, スピン群の表現と見るのか, 定義に使うベクトル空間の次元の偶奇は何であるかなどで, 文献により多少異なる書き方をされることがあることを注意しておく (もちろん非本質的な違いではあるが混乱の元になりやすいという意味では, きちんと抑えておくことは大事であろう). この節に書かれる事のうち, 次節以降必要となることを要約しておくと次のように言える. 偶数次元の複素ベクトル空間に対しては, スピン加群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つきクリフォード既約加群のことを指し, スピン表現はそれを制限して得られる表現で $Spin^c$ 群 (または, $Spin$ 群, Pin 群, Pin^c 群でも $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つきの表現論は同じ) の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つき既約表現である (このような $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つき既約加群あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つき既約表現は, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けの仕方で二つずつあるが, そのうちの一つを固定して, 次節以降は考えている).

V を非退化対称形式 g をもつ複素ベクトル空間とする (次節以降では, 偶数次元の場合だけしか扱わないが, 奇数次元の場合も書いておく). クリフォード代数 $Cl(V,g)$ は $T(V)$ を $v\otimes w+w\otimes v+2g(v,w)$ で生成される両側イデアル $I(V,g)$ で割って得られるものとして定義する. このとき $Cl(V,g)$ には $T(V)$ の $\mathbb{Z}$ フィルトレーションおよび $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けが遺伝する事を注意しておく. 後で使う性質や定義を書いておこう.

1. $(V,g)\cong(V_1,g_1)\oplus(V_2,g_2)$ と直交分解が与えられたとき, $Cl(V,g)\cong Cl(V_1,g_1)\otimes Cl(V_2,g_2)$ が $\mathbb{Z}$ フィルトレーションおよび $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けを保つ代数として成り立つ. ただし, $Cl(V_1,g_1)\otimes Cl(V_2,g_2)$ の積は $x_1\otimes x_2\cdot y_1\otimes y_2:=(-1)^{\deg x_2\deg y_1}x_1y_1\otimes x_2y_2$ で定義する.
2. $Cl(V,g)$ は $\mathbb{Z}$ フィルトレーションを持ち, グレイディングをとると言う操作で得られる $Gr(Cl(V,g))$ は外積空間 $\bigwedge V$ と $\mathbb{Z}$ 次数つきベクトル空間として同型である. 特に $Cl(V,g)\cong\bigwedge V$ という $\mathbb{Z}$ フィルトレーションつきベクトル空間としての同型がある. この同型を与える逆写像を $j:\bigwedge V\to Cl(V,g)$ と書き, Chevalley 写像と呼ぶ. これは低次のところ, すなわち, $\mathbb{C}$ 及び V を保っている.

さて, ここで目的であったスピン加群 $S(V,g)$ の定義を与える.

まず $\dim_{\mathbb{C}}V=2l$ の場合を考えよう. V の g に関する二つの l 次元イソトロピック部分空間 P と Q であって互いに双対的なものを取る. イソトロピックだから $Cl(P,g)=\bigwedge P$ および $Cl(Q,g)=\bigwedge Q$ である. ここで $Cl(V,g)$ の部分空間として, $S(V,g):=\bigwedge P\otimes\det Q\subset Cl(V,g)$ と定義すると, これは $Cl(V,g)$ の左からの積で保たれており, $Cl(V,g)$ 加群となっている. しかもこれは, $Cl(V,g)$ のただ一つの既約加群であると同時に代数としての同型 $Cl(V,g)\cong\mathrm{End}(S(V,g))$ が成り立っている.

ところで, $S(V,g)$ は $\bigwedge P$ の偶奇により, $S_+(V,g):=\bigwedge^{even}P\otimes\det Q$ および $S_-(V,g):=\bigwedge^{odd}P\otimes\det Q$ と定義することによって, $S(V,g)=S_+(V,g)\oplus S_-(V,g)$ という $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 空間と思える. これは, $Cl(V,g)$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けと整合的であるので, $Cl(V,g)$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 加群とみなせる. また, $S(V,g)=S_+(V,g)\oplus S_-(V,g)$ の次数付けを入れ替えたものも $Cl(V,g)$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 加群と思える. このとき, これらは $Cl(V,g)$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 加群として同型にはならない (この二つしか $Cl(V,g)$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 既約加群はないことも示せる). 偶数次元の (V,g) のスピン加群といった場合には, $S(V,g)$ にどちらかの $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数を固定した $Cl(V,g)$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 既約加群として以下では扱うことにする.

次に $\dim_{\mathbb{C}}V=2l-1$ の場合を考える. $\mathbb{C}e^{2l}$ なる 1 次元空間であって, e^{2l} がノルム 1 となる対称形式を持つものを補助的に使う. $V':=V\oplus\mathbb{C}e^{2l}$ を考えると, g' が V と $\mathbb{C}e^{2l}$ が直交するものとして一意に決まる. ここで上の構成を使って, $S(V',g')$ なる $Cl(V',g')$ 加群が取れるが, $Cl(V,g)\subset Cl(V',g')=Cl(V,g)\otimes Cl(\mathbb{C}e^{2l})$ によって $Cl(V,g)$ 加群が得られる. $S(V',g')$ は $Cl(V',g')$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 既約加群だったが, これはさらに $Cl(V,g)$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 加群としても既約である (唯一つのものであることも示せる, 特に $Cl(V',g')$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 既約加群は二つあっ

たのだが, どちらを制限して作っても同型である). しかし, このノートでは奇数次元の (V,g) のスピン加群と呼ぶものには, さらに $Cl(V,g)$ の次数を忘れた代数としてのセンター $Cl(\mathbb{C}\omega) := \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\omega$ の作用を持ち, $Cl(V,g)$ の作用と可換であることを要請する. ここで, ω とは, V の正規直交基底 e^i をクリフォード代数の元と見たもの γ^i を用いて, $\omega := \gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{2l-1}$ と定義したものであり, 実際これは中心元である (任意の $j \le 2l-1$ において γ^j と可換である). すると, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つき $Cl(V,g)$ 加群として既約なものは唯一だったのだが, $Cl(\mathbb{C}\omega)$ を $Cl(V,g)$ のセンターに自然に埋め込んで考えたものと, $\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}\omega$ をひっくり返して, $Cl(V)$ のセンターに埋め込んで考えたものの二つがあり, 奇数次元の (V,g) のスピン加群といった場合には, これを指し, $S(V,g)$ と書き, 一つ固定して以下では扱うことにする. 使わないが, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数づけと $Cl(\mathbb{C}\omega)$ の作用を忘れた場合も書いておく. ω^2 は 1 か -1 なので, ω の作用で $S(V',g')$ を二つの部分空間に固有分解すると, 二つの $Cl(V,g)$ 加群が得られる (これらは互いに異なる $Cl(V,g)$ 既約加群であって, $Cl(V,g)$ の既約加群がこれらに限ることが示せる).

さて続いて, ピン群やスピン群, 及びスピンリー環の定義や性質を簡単に思い出そう. W を実ベクトル空間とし正定値対称形式 g を持つとする. このときこの複素化を (V,g) と書こう. まずスピンリー環を考える. $Cl(V,g)$ の積を使ってブラケットを作ると, これはリー環と思えるが, $\mathfrak{spin}(W) := j(\bigwedge^2 W) \subset Cl(V,g)$ はそのブラケットで閉じていることが分かりリー環になる. これをスピンリー環と呼ぶ. さらに, $W \subset Cl(V,g)$ に $\mathfrak{spin}(W)$ を $Cl(V,g)$ のブラケットを使って作用させることができ, これは g を保つので $\mathfrak{spin}(W) \to \mathfrak{so}(W)$ が作れて, さらに実はリー環として同型であることも分かる. この逆写像は (W,g) の正規直交基底 $\{e^i\}$ を使って具体的に書くと, $E^i_j - E^j_i$ を $-\frac{1}{2}\gamma^i\gamma^j$ にうつす写像となっている. ここで $E^i_j e^k := \delta^k_j e^i$ であり (δ^k_j はディラックのデルタである), γ^i は e^i をクリフォード代数の元と見たものである. 次に, ピン群やスピン群についても書く. ピン群 $Pin(W,g)$ は $Cl(V,g)$ の可逆元全体のなす群の部分群であって, W の長さ 1 の元全体で生成されるものとして定義する. この連結成分をスピン群と呼び, $Spin(W,g)$ とかく. $Pin(W,g)$ から $O(W,g)$ への二重被覆写像 (制限すると $Spin(W,g)$ から $SO(W,g)$ への二重被覆写像) が共役を少しひねった作用を使うことで得ることができるが, 詳細は省く. また, これらのリー群リー環対応などもきれいに書けるが省略する.

続いてスピン ^{c} 群やピン ^{c} 群及びスピン ^{c} リー環についても書く. 上の定義で $U(1) \subset \mathbb{C} \subset Cl(V,g)$ も生成元に加えるとスピン ^{c} 群やピン ^{c} 群が定義でき, スピン ^{c} リー環は $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset Cl(V,g)$ を加えたものを考えればよい. リー群リー環対応などもきれいに書けるがやはり省略する. $Pin^c(W,g)$ は $O(W,g)$ の $U(1)$ による中心拡大, また $Spin^c(W,g)$ は $SO(W,g)$ の $U(1)$ による中心拡大と思える事を注意しておく. 次に図式を与えておくことは有意義であろう. リー群に関しては,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & Spin(W,g) & \longrightarrow & SO(W,g) & \longrightarrow & 1 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\| & & \\ 1 & \longrightarrow & U(1) & \longrightarrow & Spin^c(W,g) & \longrightarrow & SO(W,g) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

となっており, リー環に対しては,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathfrak{spin}(W,g) & = & \mathfrak{so}(W,g) & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\| & & \\ 0 & \longrightarrow & i\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{spin}^c(W,g) & \longrightarrow & \mathfrak{so}(W,g) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

であるので, 特に, $\mathfrak{spin}^c(W,g) \to \mathfrak{so}(W,g)$ は自然な切断を持つことが分かる ($\mathfrak{spin}^c(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{so}(\mathfrak{g}^*) \oplus i\mathbb{R}$ と書いたときはこの切断を使って与えられた分解を指すことにする).

今, スピン表現の定義は直ちにできて, スピン加群をスピン群, ピン群, スピン ^{c} 群, ピン ^{c} 群の作用に制限したものをスピン表現と呼ぶだけのことである. 表現論はどれも同じなのでスピン ^{c} 群についてのみ書く. スピン ^{c} 群のスピン表現は $SO(W,g)$ の特別な射影表現である. W が偶数次元の場合はスピン加群 $S(V,g)$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つき既約加群であって, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数づけの違いにより二つあった. これをスピン ^{c} 群に制限したスピン表現も $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つき既約表現で, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数づけの違いにより二つある. 以下ではそのうちの一つを固定して考えてい

る (スピン群またはスピン ^{c} 群に対しては, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数を忘れて既約分解すると二つの既約表現が得られ, これらをスピン表現と呼ぶこともあるが, ここではそのようには扱わない). W が奇数次元の場合はスピン加群 $S(V,g)$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つき既約加群であって, $Cl(\mathbb{C}\omega)$ の作用との可換性も考えれば, 二つあった. これをスピン群, ピン群, スピン ^{c} 群, ピン ^{c} 群の作用に制限したスピン表現は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つき既約表現であり, $Cl(\mathbb{C}\omega)$ の作用との可換性も考えれば, やはり二つの既約表現が得られ, これらをスピン表現と呼び, 以下では一つ固定して考える ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数を忘れて, $Cl(\mathbb{C}\omega)$ のことも忘れると既約表現は一つしかない. 奇数次元の場合, 通常はこれをスピン表現と呼ぶがここではそのようには扱わない).

実ベクトル空間 W から始めた場合には, $S(W_{\mathbb{C}},g)$ の代わりに, $S(W,g)$ と書く. また, 考えている g が明らかな場合には g を省略して書くこともある.

3.2 スピン射影表現

この節では, 連結コンパクトリー群 G またはそのリー環 $\mathfrak{g}$ の射影表現 $(\sigma, S(\mathfrak{g}^*))$ を考えたい (連結でなくても扱えるが書かない). 任意の連結コンパクトリー群 G は, 半単純コンパクトリー群 G_{ss} で中心を持たないものとトーラス G_t の積からなるリー群 $G_{ss}\times G_t$ の有限アーベル群による中心拡大として, $G=\widetilde{G_{ss}\times G_t}$ とかけることに注意する. G_{ss} の極大トーラスを T_{ss} と書いたとき, $T_{ss}\times G_t$ を $G_{ss}\times G_t$ の極大トーラスと呼び, $T:=\widetilde{T_{ss}\times G_t}$ を G の極大トーラスと呼ぶ. 一方, リー環は $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{ss}\oplus\mathfrak{g}_t$ となるので, この極大トーラスは $\mathfrak{t}:=\mathfrak{t}_{ss}\oplus\mathfrak{g}_t$ となる. ところで, $G/T=G_{ss}/T_{ss}$ であり, これは偶数次元であるから, G と T の次元の偶奇は一致している. これが奇数次元の場合には $U(1)$ をかけて 1 次元上げることで偶数次元にしたものを考えることにするが K 理論に関連したことを扱う際には有効であるが, これ以上は説明しない.

以下では, 簡単のため, 偶数次元半単純連結コンパクトリー群 G を考える. 一般の場合もトーラス $\mathfrak{g}_t$ に負定値対称形式を一つ固定してキリングフォームの代用物として扱えば, 以下の話はうまく行くが煩雑になるので書かない.

この節では極大トーラス T を固定しておく. いま G はコンパクトなのでこの実リー環 $\mathfrak{g}$ のキリング形式 B は負定値であることに注意しておく ([18]). 計算を間違わないために, $g:=-B$ と定義し, 正定値にしておく. 正規直交基底という場合には, この内積に関するものとする. $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視するときは g を使って与え ($\mathfrak{g}\ni X\mapsto X^*\in\mathfrak{g}$ 及び $\mathfrak{g}^*\ni\nu\mapsto\nu_*\in\mathfrak{g}$ と書く), これが等長になるように $\mathfrak{g}^*$ にも内積 g^* を入れる (B を使って同様の事をやると B^* が決まり, $g^*=-B^*$ である). また複素化されたリー環上には $\mathfrak{g}$ を複素線型に拡張したものを扱うことにするので, 複素化されたリー環のルート分解に関して古典的な結果を使うときには注意が必要である. 以下では, 考えている正定値対称形式は g に付随したものなので, たとえば, $S(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}},g^*)$ は, $S(\mathfrak{g}^*)$ あるいは $S(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}})$ というように略記する.

注意 3.1. 極大トーラス T のリー環を $\mathfrak{t}$ と書き, その直交補空間を $\mathfrak{t}_\perp$ とかくと, $S(\mathfrak{g}^*)=S(\mathfrak{t}^*_\perp)\otimes S(\mathfrak{t}^*)$.

リー群及びリー環のコアジョイント作用から来る射影表現 σ の定義を与える (これをスピン射影表現と呼ぶことにしよう). $Ad^*:G\to SO(\mathfrak{g}^*)$ を用いて, $U(1)$ による $SO(\mathfrak{g}^*)$ の中心拡大 $Spin^c(\mathfrak{g}^*)$ を引き戻すと, $U(1)$ による G の中心拡大 G^σ が得られる. 同様にして, ad^* を用いると $i\mathbb{R}$ による $\mathfrak{g}$ の中心拡大 $\mathfrak{g}^\sigma$ が得られる. よって G^σ および $\mathfrak{g}^\sigma$ が $S(\mathfrak{g}^*)$ に作用し (この表現を σ と書く), それぞれの $U(1)$ および $i\mathbb{R}$ がスカラーで作用している.

しかしながらリー環の場合は $\mathfrak{g}^\sigma\to\mathfrak{g}$ はいつでも, $\mathfrak{spin}^c(W,g)\to\mathfrak{so}(W,g)$ の自然な (リー代数の準同型になっている) 切断が誘導する切断を持つので (これをやはり自然な切断と呼び, $\mathfrak{g}^\sigma=\mathfrak{g}\oplus i\mathbb{R}$ と書いたときはこの切断を使って与えられた分解を指すことにする), それを用いて得られる表現 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^\sigma\to Cl(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}})$ を考え再び σ と書く. 同じことだが, これは, $E^i_j-E^j_i$ を $-\frac{1}{2}\gamma^i\gamma^j$ にうつす写像 $\mathfrak{so}(\mathfrak{g}^*)\cong\mathfrak{spin}(\mathfrak{g}^*)\to Cl(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}})$ とコアジョイント表現 $ad^*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{so}(\mathfrak{g}^*)$ の合成と思うと扱いやすい.

ここからの目標は $\mathfrak{g}$ の表現 $(\sigma, S(\mathfrak{g}^*))$ のウェイト分解を与えることである．以下，しばらく $S(\mathfrak{g}^*)$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けは忘れる．

まず $S(\mathfrak{g}^*)$ をもう少し具体的に書こう．今，$S(\mathfrak{g}^*) = S(\mathfrak{t}_\perp^*) \otimes S(\mathfrak{t}^*)$ と書けていたのだが，特に $S(\mathfrak{t}_\perp^*)$ について考えよう．まず，複素化 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ を考えてカルタン部分環を $\mathfrak{h} := \mathfrak{t}_\mathbb{C}$ とし，ポジティブルートの集合 Δ_+ を選んでおくと（ポジティブルート全部の和の半分を ρ と書く），$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ とルート分解できる．このとき，$\mathfrak{n} := \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{t}_\perp \otimes \mathbb{C}$ だから $S(\mathfrak{n}^*) = \bigwedge \mathfrak{n}_+^* \otimes \det \mathfrak{n}_-^* \subset Cl(\mathfrak{g}_\mathbb{C}^*)$ ($\mathfrak{n}_-^*$ と $\mathfrak{n}_+^*$ は g^* に関してイソトロピックで互いに双対的である)．ここで σ を $\mathfrak{h}$ に制限して考えると，$S(\mathfrak{t}^*)$ に対しては 0 で作用するので考えなくて良い．すなわち，$\mathfrak{h}$ の表現として $S(\mathfrak{g}^*)$ は，$S(\mathfrak{t}_\perp^*)$ が $\dim S(\mathfrak{t}^*)$ 個直和されたものと思える．より正確に言うと $S(\mathfrak{g}^*)$ は $\mathfrak{h}$ の表現として，$(\sigma, S(\mathfrak{t}_\perp^*))$ と自明表現 $S(\mathfrak{t}^*)$ のテンソル表現である ($[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}^*] \subset \mathfrak{n}^*$ だから $\mathfrak{h} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{n}^*) \to Cl(\mathfrak{n}^*)$ である．$\mathfrak{h}$ は $Cl(\mathfrak{g}^*) \cong Cl(\mathfrak{n}^*) \otimes Cl(\mathfrak{h}^*)$ を通してテンソル表現として $S(\mathfrak{g}^*) \cong S(\mathfrak{n}^*) \otimes S(\mathfrak{h}^*)$ に作用するといっても良い)．

ここで定義や簡単な計算を羅列しておく，次節以降でも断り無しに使う．e_a たちを $\mathfrak{g}$ の基底とし，その双対基底を $e^a \in \mathfrak{g}^*$ とかく．

1. $\gamma : \mathfrak{g}_\mathbb{C}^* \to Cl(\mathfrak{g}_\mathbb{C}^*)$ を自然な埋め込みとする．
2. $R : \mathfrak{g}_\mathbb{C} \to U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ を自然な埋め込みとする．
3. e^a をクリフォード代数 $Cl(\mathfrak{g}_\mathbb{C}^*)$ の元と思うときには，$\gamma(e^a) =: \gamma^a$.
4. $\sigma(e_a) =: \sigma_a$.
5. e^a を普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の元と思うときには，$R(e_a) =: R_a$.
6. $\gamma^a := \gamma^a \otimes 1 \in Cl(\mathfrak{g}_\mathbb{C}^*) \otimes U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.
7. $\sigma_a := \sigma_a \otimes 1 \in Cl(\mathfrak{g}_\mathbb{C}^*) \otimes U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.
8. $R_a := 1 \otimes R_a \in Cl(\mathfrak{g}_\mathbb{C}^*) \otimes U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.
9. $g(e_a, e_b) =: g_{ab}$.
10. $g^*(e^a, e^b) =: g^{ab}$.
11. $[e_a, e_b] =: f_{ab}^c e^c$.
12. $g([e_a, e_b], e_c) =: f_{abc}$.
13. $\sigma_a = \frac{1}{4} f_{abc} \gamma^b \gamma^c$.
14. $\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = -2g^{ab}$.
15. $[\sigma_a, \sigma_b] = f_{ab}^c \sigma_c$.
16. $[R_a, R_b] = f_{ab}^c R_c$.
17. $[R_a, \sigma_b] = 0$.
18. $[R_a, \gamma^b] = 0$.
19. $[\sigma_a, \gamma^b] = -f_{ac}^b \gamma^c$.
20. $\gamma(\Omega) := \frac{1}{6} f_{abc} \gamma^a \gamma^b \gamma^c$.

    特に e_a たちが $\mathfrak{g}$ に関して正規直交基底なら次も成り立つ．
21. $f_{ab}^c = f_{abc}$.
22. $\gamma^a [\sigma_a, \gamma^b] = -4\sigma_b$.

命題 3.2. $S(\mathfrak{t}_\perp^*) = S(\mathfrak{n}^*) = \bigwedge \mathfrak{n}_+^* \otimes \det \mathfrak{n}_-^*$ への $\mathfrak{h}$ の σ による表現は $\bigwedge(\bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{C}_{-\alpha}) \otimes \mathbb{C}_\rho$ と同値．より具体的に次のように言える．$\{e^\alpha, e^{-\alpha}\}_{\alpha \in \Delta_+}$ をルート空間の基底であって g^* ではなく，キリング形式 B^* に関して互いに双対的とすると，$S(\mathfrak{n}^*)$ の基底の各元 $\gamma^{\alpha_{i_1}} \dots \gamma^{\alpha_{i_k}} \otimes \gamma^{-\alpha_1} \dots \gamma^{-\alpha_l} \in S(\mathfrak{n}^*)$ には $-(\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}) + \rho$ で $\mathfrak{h}$ は作用する．ここで，$\dim_\mathbb{R} \mathfrak{t}_\perp^* = 2l$ としている．

証明. $\sigma_h = \frac{1}{4}(f_{h,\alpha,-\alpha} \gamma^\alpha \gamma^{-\alpha} + f_{h,-\alpha,\alpha} \gamma^{-\alpha} \gamma^\alpha) = \frac{1}{4}(-\alpha(e_h) \gamma^\alpha \gamma^{-\alpha} + \alpha(e_h) \gamma^{-\alpha} \gamma^\alpha) = -\frac{2}{4} \alpha(e_h) \gamma^\alpha \gamma^{-\alpha} +$

$\frac{1}{2}\alpha(e_h)$ よって σ_h は $\gamma^{\alpha_{i_1}}\dots\gamma^{\alpha_{i_k}}\otimes\gamma^{-\alpha_1}\dots\gamma^{-\alpha_l}$ に対して, $-(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k})(e_h)+\rho(e_h)$ となることが分かる. □

定義 3.3. $L_{-\rho}:=\det\mathfrak{n}_+^*\otimes\det\mathfrak{n}_-^*$.

系 3.4. $S(\mathfrak{g}^*)$ のウェイト分解は $\bigwedge(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathbb{C}_{-\alpha})\otimes\mathbb{C}_\rho\otimes S(\mathfrak{t}^*)$ と同値. 特に $S(\mathfrak{g}^*)$ の Δ_+ に関する最低ウェイトは $-\rho$ であり, そのウェイト空間は $S_{-\rho}=L_{-\rho}\otimes S(\mathfrak{t}^*)$.

以下では, Δ_+ に関する最低ウェイトという代わりに, ρ に関する最低ウェイトという言い方をすることがある.

次に ρ に関する最低ウェイトが $-\lambda$ である $\mathfrak{g}$ の既約表現 V をとる. (最低ウェイト空間を $V_{-\lambda}$ とかく.) するとこのとき,

系 3.5. $S(\mathfrak{g}^*)\otimes V$ の ρ に関する最低ウェイトは $-\rho-\lambda$ であり, そのウェイト空間は $S_{-\rho}\otimes V_{-\lambda}$.

このとき, $-\rho-\lambda$ は regular であることを注意しておく.

4 Cubic Dirac 作用素と Kirillov 対応の逆

4.1 Cubic Dirac 作用素の定義とその性質

唐突ではあるが, Cubic Dirac 作用素を定義しよう (これをどのように思うべきかについては付録 B を参照せよ).

定義 4.1. $D_0:=\gamma^a\otimes R_a+\frac{1}{3}\gamma^a\sigma_a\otimes 1\in Cl(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)\otimes U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

これは自己共役作用素である.

補題 4.2. $D_0=\gamma^a\otimes R_a+\frac{1}{3}\gamma^a\sigma_a\otimes 1=\gamma^a\otimes R_a+\frac{1}{2}\gamma(\Omega)$. ここで $\gamma(\Omega):=\frac{1}{6}f_{abc}\gamma^a\gamma^b\gamma^c$.

cubic 形式 Ω をキリング形式 B を使って, $\Omega(e_a,e_b,e_c):=\frac{1}{6}f_{abc}=-\frac{1}{6}B([e_a,e_b],e_c)$ と定義すると, これによるクリフォード作用が $\gamma(\Omega)$ に他ならないので, D_0 は cubic Dirac 作用素と呼ばれる.

$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を g を使って移しあうときには * または $_*$ を使ってあらわすのであった.

補題 4.3. 任意の $X\in\mathfrak{g}$ と $\nu\in\mathfrak{g}^*$ に対して, 次が成立. $D_0(\sigma+R)(X)-(\sigma+R)(X)D_0=0$, $D_0\gamma(\nu)+\gamma(\nu)D_0=-2(\sigma+R)(\nu_*)$.

証明. $X=R_b$ や $\nu=e^b$ の場合にやればよい ($(e^b)_*=e_b$ である). 前節に書いた等式たちを使えばできる. □

命題 4.4. 任意の $X\in\mathfrak{g}$ と $\nu\in\mathfrak{g}^*$ に対して, 次が成立. $D_0^2(\sigma+R)(X)-(\sigma+R)(X)D_0^2=0$, $D_0^2\gamma(\nu)-\gamma(\nu)D_0^2=0$.

証明. 一つ目は明らか. 二つ目を考える. $D_0\gamma(\nu)+\gamma(\nu)D_0=-2(\sigma+R)(\nu_*)$ に左から D_0 をかけたものと, 右から D_0 をかけたものの差は $-2(D_0(\sigma+R)(X)-(\sigma+R)(X)D_0)=0$ だから 0. □

命題 4.5. D_0^2 は $S(\mathfrak{g}^*)\otimes V$ に $|-\rho-\lambda|_{B^*}^2 id$ で作用する.

証明. $S(\mathfrak{g}^*)\otimes V$ が $Cl(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*)$ と $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の作用で $L_{-\rho}\otimes V_{-\lambda}$ を動かすことで定義できることに注意する. また D_0 が $S_{-\rho}\otimes V_{-\lambda}$ に $\gamma(-\rho-\lambda)$ で作用する事が確かめられ, 特に D_0^2 が $S_{-\rho}\otimes V_{-\lambda}$ に $|-\rho-\lambda|_{B^*}^2 id$ で作用する. 従って前命題から従う. □

命題 4.6. $D_0^2 = -R_i^2 - \frac{1}{3}\sigma_i^2$

証明. 多少面倒だが, やはり前節の等式たちを使って計算するわかる. □

これはポジティブ作用素である.

$\mu \in \mathfrak{g}^*$ を取る. $|\mu^*|_g^2 := g(\mu^*, \mu^*)$ とする.

定義 4.7. $D_\mu := D_0 - i\gamma(\mu)$, $2E_\mu := |\mu^*|_g^2 + 2(\sigma + R)(i\mu^*)$.

これらは自己共役作用素である.

補題 4.8. $D_\mu^2 = D_0^2 + 2E_\mu$.

これはポジティブ作用素である.

ここまでは, 極大トーラスを一つ固定してやってきたのだが, 今, 与えられた $\mu \in \mathfrak{g}^*$ を固定する極大トーラス T_μ に取り直して考え, このリー環を t_μ と書く. 特に, μ がコアジョイント作用で regular なら, T_μ は固定化群に他ならない.

補題 4.9. $\mu \in \mathfrak{t}_\mu^*$, すなわち, $\mu_* \in \mathfrak{t}_\mu$ である. 従って, $i\mu \in i\mathfrak{t}_\mu^* =: (\mathfrak{h}_\mu^*)_\mathbb{R}$.

証明. $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{h}_\mu \oplus \mathfrak{n}_\mu = \mathfrak{h}_\mu \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_\mu} \mathfrak{n}_\alpha$ なるルート分解を考える. $\forall v_\alpha \in \mathfrak{n}_\alpha \subset \mathfrak{n}_\mu$ に対して, $-B(\mu_*, v_\alpha) = \mu(v_\alpha) = 0$ を示せば良い. $[t, v_\alpha] = \alpha(t)v_\alpha$ より, $\alpha(t) \neq 0$ なる $t \in \mathfrak{t}_\mu$ を選べば, $\mu(v_\alpha) = \frac{1}{\alpha(t)}\mu([t, v_\alpha]) = -\frac{1}{\alpha(t)}\mathrm{ad}^*(t)(\mu)(v_\alpha) = 0$. ここで, μ が定義により, T_μ のコアジョイント作用で不変であったから, $\mathfrak{t}_\mu$ のコアジョイント作用でも 0 になることを使った. □

このとき, $i\mu$ が anti-dominant になるように定めた正ルートを Δ_μ^+ と書く. 特に, μ がコアジョイント作用で regular なら一意に取れる. このとき, $\rho_\mu := \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta_\mu^+} \alpha$ と定義する. 特に, μ が regular ならば, T_μ, Δ_μ^+ の取り方は一意だったから, ρ_μ も一意に定まる. このように, μ から ρ_μ を作る操作を一連の操作などと以下ではよぶことがある. また ρ_μ とかいたら, μ から一連の操作で作ったものとする (regular でないときは任意性が残るが). V が G の既約表現のとき T_μ に関するウェイト分解を考え, ρ_μ に関する, すなわち, Δ_μ^+ に関する最低ウェイトを $\genfrac{}{}{0pt}{}{\lambda}{\mu}$ と書く. 以下では, 特に断ること無しにこれらの記号を使う.

命題 4.10. $2E_\mu$ は T_μ に関する $S \otimes V$ の各ウェイト空間上コンスタント倍で作用し, そのコンスタントがウェイト ω のところでは, $|i\mu|_B^2 - 2B(\omega, i\mu)$ であり, 特にに最低固有値が $|i\mu|_{B^*}^2 - 2B(-\rho_\mu - \lambda_\mu, i\mu)$.

証明. 計算するとわかる. ここで, $|i\mu|_{B^*}^2 = |\mu|_{g^*}^2 = |\mu_*|_g^2$ である. □

D_μ^2 がポジティブ作用素であり, D_0^2 が $|-\rho_\mu - \lambda_\mu|_{B^*}^2 id$ という定数倍で作用することに注意すると次がわかる.

系 4.11. D_μ^2 は $i\mu = -\rho_\mu - \lambda_\mu$ のときに限り, 核を持ち, それは $S_{-\rho_\mu} \otimes V_{-\lambda_\mu}$ に他ならない. 従って, D_μ についても同様である.

与えられた表現 V に対して $i\mu = -\rho_\mu - \lambda_\mu$ がいつ満たされるかを述べておこう.

補題 4.12. V に対して, 次のような性質を持つ $\mathfrak{O}$ が一意に決まる ($\mathfrak{O}_V$ と書く). すなわち, 任意の $\mu \in \mathfrak{O}_V$ に対して, 一連の操作により決まる ρ_μ および λ_μ が $i\mu = -\rho_\mu - \lambda_\mu$ を満たす. さらに, $\mu \notin \mathfrak{O}_V$ に対しては, これを (regular とは限らない) anti-dominant となるように, T_μ と Δ_μ^+ をどのように選んでも ρ_μ および λ_μ は $i\mu = -\rho_\mu - \lambda_\mu$ を満たさない.

証明. 極大トーラス T と正ルートの集合 Δ^+ を固定し, 既約表現 V の ρ に関する最低ウェイト $-\lambda$ をとる.

$i\mu := -\lambda - \rho$ とおくと, これは anti-dominant であり, $T = T_\mu$ であるし, この μ から一連の操作を行うと $\rho_\mu = \rho$ かつ $\lambda_\mu = \lambda$ となる. ここで, $\mathfrak{O} := G\mu$ と定義する. $\mathfrak{O}$ が, V だけで決まることを言おう. まず, T は固定したまま, 別の Δ'_+ すなわち ρ' をとると, $\rho' = Ad^*_w \rho$ と書ける. ここで $w \in W(T) := N(T)/T$ はワイル群の元. このとき, $\lambda' = Ad^*_w \lambda$ だから, $\mu' = Ad^*_w \mu$. よって, $G\mu' = G\mu \subset \mathfrak{g}^*$. 次に, T と異なる T' からはじめる. このとき, $T' = gTg^{-1}$ と書ける. よって, $\rho' \in (\mathfrak{t}')^*_{\mathbb{C}}$ を $\rho' = Ad^*_g \rho$ ととることができるので, 結局, $\mu' = Ad^*_g \mu$ とかけ, $G\mu' = G\mu$ となる. よって, これを $\mathfrak{O}_V$ と書いてよい. とくに, 任意の $\nu \in \mathfrak{O}_V$ は一つ固定された μ から G のコアジョイントで得られるのだから, $i\nu = -\rho_\nu - \lambda_\nu$ を満たすことも分かる.

後半を示そう. ところで, どんな μ から初めても $-\rho_\mu - \lambda_\mu$ は regular であるから, $i\mu = -\rho_\mu - \lambda_\mu$ を満たすためには, μ は regular でなければならない. したがって, regular 軌道のみを考えてよい. 今, regular な μ に対して, T_μ と ρ_μ をとって, $i\mu = -\lambda_\mu - \rho_\mu$ を満たしたとする. このとき, regular 軌道 $G\mu$ は上で定義された $\mathfrak{O}_V$ に他ならない. なぜなら, 上の構成を $T = T_\mu$ かつ $\rho = \rho_\mu$ の場合に行ったものに他ならないからである. □

系 4.13. G の既約表現 V に対して, $\{D_\mu\}_{\mu \in \mathfrak{g}^*}$ の台は $\mathfrak{O}_V$ である.

その他の性質で大事なものとしては次がある.

命題 4.14. $\mathfrak{g}^* \ni \mu \to D_\mu \in$ は $\mathfrak{g}$ 同変, G 同変.

これは, D_0 が $\mathfrak{g}$ 不変, G 不変であることから従う.

注意 4.15. G の有限次元表現 V が与えられたとき, $S(\mathfrak{g}^*) \otimes V$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つき G^σ 表現である. これを $\hat{H}_{G,\sigma}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つき G^σ 普遍表現の直和分解の成分とみなす. このとき, $D_\mu(V)$ を $S(\mathfrak{g}^*) \otimes V$ 上は上記の D_μ であって, $(S(\mathfrak{g}^*) \otimes V)^\perp$ 上は恒等写像となるものと定義する. すると, $D(V) := \{D_\mu(V)\}_{\mu \in \mathfrak{g}^*} \in \mathrm{Fred}^{(0)}(H_{G,\sigma})$ である.

まとめると次のように書ける.

定理 4.16. $D(V)$ は $\mathfrak{O}_V$ にサポートを持つ, すなわち, $\mathfrak{O}_V$ の外では可逆である. さらに, $\mu \in \mathfrak{O}_V$ に対して, $D_\mu(V)$ の核は $S_{-\rho_\mu} \otimes V_{-\lambda_\mu}$ となる. そこで, $V_{-\lambda_\mu}$ を並べた $\mathfrak{O}_V$ 上の直線束を V_{Ker} と書き, $S_{-\rho_\mu}$ を並べた $\mathfrak{O}_V$ 上のベクトル束を S_{Ker} と書く. このとき, V_{Ker} は $\mathfrak{O}_V$ 上の G 同変直線束である. また, S_{Ker} および $\mathrm{Ker}D(V)|_{\mathfrak{O}_V}$ は $\mathfrak{O}_V$ 上の G^σ 同変ベクトル束であり, $U(1)$ は各ファイバーにスカラー倍で作用する. よって, S_{Ker} および $\mathrm{Ker}D(V)|_{\mathfrak{O}_V}$ はファイバーごとに射影化すると $\mathfrak{O}_V$ 上の G 同変射影空間束である. また, $\mu \in \mathfrak{O}_V$ を固定しておくと, $\mathfrak{O}_V \cong G/T_\mu \cong G^\sigma/T^\sigma_\mu$ と書け, さらに, $V_{\mathrm{Ker}} \cong G \times_{T_\mu} V_{-\lambda_\mu}$ および $S_{\mathrm{Ker}} \cong G^\sigma \times_{T^\sigma_\mu} S_{-\rho_\mu}$ と書ける. また, $\mathrm{Ker}D(V)|_{\mathfrak{O}_V} = S_{\mathrm{Ker}} \otimes V_{\mathrm{Ker}} \cong G^\sigma \times_{T^\sigma_\mu} S_{-\rho_\mu} \otimes V_{-\lambda_\mu}$ である.

注意 4.17. $N\mathfrak{O}_V$ を $\mathfrak{O}_V \to \mathfrak{g}^*$ なる G 同変埋め込みの G 同変法束とすると, $\mathfrak{O}_V$ の各点 μ 上には, $N_\mu = \mathfrak{t}^*_\mu$ が乗っている. これは, G 同変束として自明化を持つ. これに付随する $\mathfrak{O}_V$ 上の複素クリフォード束を $\mathbb{C}l(N\mathfrak{O}_V)$ と書き, スピン束を $S(N\mathfrak{O}_V)$ と書く. それぞれ, $\mathfrak{O}_V$ の各点 μ 上には, $\mathbb{C}l(N_\mu) = Cl(\mathfrak{t}^*_{\mu,\mathbb{C}})$ および $S(N_\mu) = S(t^*_{\mu,\mathbb{C}})$ が乗っている. これは, それぞれ G 同変束として自明化を持つ. 今, S_{Ker} が $\mathbb{C}l(N\mathfrak{O}_V)$ の作用を持つことに注意して, $L := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}l(N\mathfrak{O}_V)}(S(N\mathfrak{O}_V), S_{\mathrm{Ker}})$ と定義すると, μ 上に $L_{-\rho_\mu} = \mathrm{Hom}_{Cl(\mathfrak{t}^*_{\mu,\mathbb{C}})}(S(t^*_{\mu,\mathbb{C}}), S_{-\rho_\mu})$ が乗っていることになる. これは, G^σ 直線束で自明とは限らない. 実際, $\mu \in \mathfrak{O}_V$ を固定しておくと, $L \cong G^\sigma \times_{T^\sigma_\mu} \mathbb{C}_{-\rho_\mu}$ である. もう少しくどく言うと以下のようになる. $N\mathfrak{O}_V \cong G \times_{T_\mu} \mathfrak{t}^*_\mu = G/T_\mu \times \mathfrak{t}^*_\mu$ と書けるので, $\mathbb{C}l(N\mathfrak{O}_V) \cong G/T_\mu \times Cl(\mathfrak{t}^*_{\mu,\mathbb{C}})$ および $S(N\mathfrak{O}_V) \cong G/T_\mu \times S(\mathfrak{t}^*_{\mu,\mathbb{C}})$ である. 一方, $S_{\mathrm{Ker}} \cong G^\sigma \times_{T^\sigma_\mu} S_{-\rho_\mu}$ であったので, $L \cong G^\sigma \times_{T^\sigma_\mu} \mathrm{Hom}_{Cl(\mathfrak{t}^*_{\mu,\mathbb{C}})}(S(t^*_{\mu,\mathbb{C}}), S_{-\rho_\mu})$ であるが, T^σ_μ の表現として, $\mathrm{Hom}_{Cl(\mathfrak{t}^*_{\mu,\mathbb{C}})}(S(t^*_{\mu,\mathbb{C}}), S_{-\rho_\mu})$ は $\mathbb{C}_{-\rho_\mu}$ と同型である.

G^σ ベクトル束として $S_{\mathrm{Ker}} = S(N\mathfrak{O}_V) \otimes L$ および $\mathrm{Ker}D(V)|_{\mathfrak{O}_V} = S(N\mathfrak{O}_V) \otimes L \otimes V_{\mathrm{Ker}}$ が成り立つ.

4.2 Kirillov 対応とその逆

以下, G は連結コンパクト半単純リー群とする.

前節では, G の既約表現 V から, regular コアジョイント軌道 $\mathfrak{O}_V \subset \mathfrak{g}^*$ を作った. これは, Kirillov 対応の逆になっていることを示そう.

まず前節の復習及びスピン可積分という言葉を導入する. G の極大トーラス T を固定し, それぞれのリー環を $\mathfrak{g}$ および $\mathfrak{t}$ と書いておく. このとき, $T = \{\exp(2\pi it) | t \in \mathfrak{t}\}$ と書けることに注意しよう. $Ad^* : G \to SO(\mathfrak{g}^*)$ と $1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to Spin(\mathfrak{g}^*) \to SO(\mathfrak{g}^*) \to 1$ により得られる G の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ による中心拡大を $\widehat{G}$ と書き, T の引き戻しを $\widehat{T}$ とかく.

注意 4.18. G^σ と $\widehat{G}$ は, $G^\sigma \cong \widehat{G} \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1)$ という関係にある. また, $T^\sigma \cong \widehat{T} \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1)$ である. 他の節にこの節の内容を適用する際などは, 必要に応じて $\widehat{G} \times_{\widehat{T}}$ を $G^\sigma \times_{T^\sigma}$ と置き換えて考える.

今, $\mathfrak{t}$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_i\mu$ を考えよう. ここで $\mu \in \mathfrak{t}^*$ に対して, $i\mu(t)$ 倍するという作用によって得られる 1 次元表現を $\mathbb{C}_{i\mu}$ と書いている. このとき, 次のように定義する.

定義 4.19. $\mathbb{C}_{i\mu}$ が可積分とは, T の表現に持ち上がること, すなわち, $T \ni \exp(2\pi it) \mapsto \exp(2\pi i\mu(t)) \in U(1)$ が well-definded であることを言う. また, $\mathbb{C}_{i\mu}$ がスピン可積分とは, $\widehat{T}$ の表現に持ち上がることをいう. とくに, $Ad^* : G \to SO(\mathfrak{g}^*)$ が $Spin(\mathfrak{g}^*)$ への表現に持ち上がるとき, 例えば G が単連結のときには, $\mathbb{C}_{i\mu}$ が可積分であることとスピン可積分であることは同値である.

$\mathbb{C}_{i\mu}$ がスピン可積分ということは, 次のように言い換えることもできる. あるポジティブルートの集合を取って, これのすべての元の和の半分を ρ と書き, $\mathfrak{t}$ の表現 $\mathbb{C}_{i\mu+\rho}$ を考えると, これは可積分, すなわち, T の表現に持ち上がる. 標語的に言うと ρ のずらしによって可積分にできる. あるポジティブルートの集合ではなく, 任意のポジティブルートの集合としても同値である.

regular コアジョイント軌道 $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{g}^*$, すなわち, コアジョイント軌道であって, 任意の $\mu \in \mathfrak{O}$ に対して, それを固定する部分群 $T_\mu \subset G$ が極大トーラスになるものをとる (ある $\mu \in \mathfrak{O}$ としても同値). このとき, $\mu \in \mathfrak{t}_\mu^*$ だから, $t \in \mathfrak{t}_\mu$ に対して, $i\mu(t)$ 倍するという作用によって得られる 1 次元表現 $\mathbb{C}_{i\mu}$ が考えられえる.

定義 4.20. regular コアジョイント軌道 $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{g}^*$ が可積分とは, 任意の $\mu \in \mathfrak{O}$ に対して, $\mathbb{C}_{i\mu}$ が可積分であることを言う. また, regular コアジョイント軌道 $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{g}^*$ がスピン可積分とは, 任意の $\mu \in \mathfrak{O}$ に対して, $\mathbb{C}_{i\mu}$ がスピン可積分であることを言う.

上の定義は, 任意の $\mu \subset \mathfrak{O}$ とせずに, ある $\mu \subset \mathfrak{O}$ といっても良いことは簡単に確かめられる.

このとき, 前節の $\mathfrak{O}_V$ の特徴づけの証明及びスピン可積分が ρ のずらしで可積分と言い換えられることから次が従う.

命題 4.21. G の既約表現 V から, 前節で作られた regular コアジョイント軌道 $\mathfrak{O}_V \subset \mathfrak{g}^*$ はスピン可積分である.

これが Kirillov 対応の逆であることを見るために, Kirillov 対応について思い出そう.

Kirillov 対応とは, 一言で言うと, スピン可積分な regular co-adjoint 軌道 $\mathfrak{O}$ から有限次元既約 G 表現 V を構成するすることであった. 付録 C を使うと, 正確には次のように言える.

命題 4.22. スピン可積分な regular co-adjoint 軌道 $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{g}^*$ に対して, 任意の $\mu \in \mathfrak{O}$ を取る. このとき, 極大トーラス T_μ と $i\mu \in i\mathfrak{t}_\mu^*$ に関して Dirac induction することで得られる表現は, ρ_μ に関して, 最低ウェイト $i\mu + \rho_\mu$ を持つ既約表現である. この表現は $\mu \in \mathfrak{O}$ の取り方によらないので, $V_{\mathfrak{O}}$ と書く.

これは, 表現論でなじみのある言葉, すなわち, Holomorphic induction の言葉でも言うことはできるが省略する (付録 C 参照).

以上の構成を追っていくと, 前節の V から $\mathfrak{O}_V$ を作る操作は Kirillov 対応の逆である, すなわち, 次が成り立つことが確かめられる.

系 4.23. $V = V_{\mathfrak{O}_V}$ および $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_{V_{\mathfrak{O}}}$ が成り立つ.

5 捩れ K 群による表現環の表示

ここでは, 前章までで考察したことを K 理論の言葉で解釈しなおそう.

前章までに, 次の写像の構成がなされた.

$$D_* : K_G^0(*) \to K_G^{\sigma(\mathfrak{g}^*)+\dim\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}^*)_{cpt}$$

ここで, $K_G^{\sigma(\mathfrak{g}^*)+\dim\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}^*)_{cpt} := \pi_0(C_c(\mathfrak{g}^*, \mathrm{Fred}^{(0)}(H_{G,\sigma}))^G)$. この写像は, G の表現 V に対し, $\mathfrak{g}^*$ をパラメーターとする Fredholm 作用素の族 $D_*(V)$ を対応させるものである. V に対して $\ker D_*(V)$ の台は, ある regular co-ajoint 軌道 $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_V$ になるのであった. $\pi^{\mathfrak{g}^*} : \mathfrak{g}^* \to *, \pi^{\mathfrak{O}} : \mathfrak{O} \to *$ を射影, $i : \mathfrak{O} \to \mathfrak{g}^*, j : * \to \mathfrak{g}^*$ を inclusion とする時, 次の図式の可換性を考えたい. ここで, j_* 等は push-forward 写像である ([5]).

$$\begin{tikzcd} & K_G^{\sigma(\mathfrak{O})+\dim\mathfrak{O}}(\mathfrak{O}) \arrow[dl, "\pi_*^{\mathfrak{O}}"'] \arrow[dr, "i_*"] & \\ K_G^0(*) \arrow[rr, shift left, "j_*, D_*"] & & K_G^{\sigma(\mathfrak{g}^*)+\dim\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}^*)_{cpt} \arrow[ll, shift left, "(\pi^{\mathfrak{g}^*})_*"] \end{tikzcd}$$

ここで, $K_G^{\sigma(\mathfrak{O})+\dim\mathfrak{O}}(\mathfrak{O}) := \pi_0(\Gamma(X, G \times_T \mathrm{Fred}^{(0)}(H_{G\times T^{op},\sigma}))^G) = [G, \mathrm{Fred}^{(0)}(H_{G\times T^{op},\sigma})]^{G\times T^{op}}$ であるが付録 A も参照せよ.

定理 5.1. $L \otimes V_{\mathrm{Ker}} \to \mathfrak{O}$ を前章で構成されたベクトル束とする時, 次が成り立つ.

1. $(\pi^{\mathfrak{g}^*})_* \circ j_* = 1$
2. $(\pi^{\mathfrak{g}^*})_* \circ i_* = \pi_*^{\mathfrak{O}}$
3. $\pi_*^{\mathfrak{O}}(L \otimes V_{\mathrm{Ker}}) = V$, 特に $\pi_*^{\mathfrak{O}}$ は全射.
4. $j_* = D_*$
5. $i_*(L \otimes V_{\mathrm{Ker}}) = D_*(V)$
6. D_* と $(\pi^{\mathfrak{g}^*})_*$ は互いに逆である. 特に, D_* は同型写像である.

証明. (1) 及び (2) $\pi^{\mathfrak{g}^*} \circ j = 1, \pi^{\mathfrak{g}^*} \circ i = \pi^{\mathfrak{O}}$ であるから, push-forward 写像の関手性から明らかである.

(3) 前章で見た通り, Dirac induction(付録 C) から従う.

(4) まず, push-forward 写像 j_* とは次の様な写像であった事を思い出そう.

$$\begin{aligned} j_* : K_G^0(*) &\to K_G^{\sigma(\mathfrak{g}^*)+\dim\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}^*)_{cpt} \\ V &\mapsto -i\gamma \otimes 1 \in \mathrm{End}(S(\mathfrak{g}^*) \otimes V) \end{aligned}$$

$-i\gamma \otimes 1$ と書く代わりに, $-i\gamma$ と書くことにする.

V を一つ固定して考える. $D_\mu = D_0 - i\gamma(\mu)$ の核の台である $\mathfrak{O} := \mathfrak{O}_V$ と $\gamma(\mu)$ の核である原点を内部に含む,

原点を中心とする閉球 K と, K を含む, 原点を中心とする開球 U を一つとる. ここで, 瘤関数 $h:\mathfrak{g}^*\to[0,1]$ を,

$$h(\mu)=\begin{cases}0 & \mu\notin U\\ 1 & \mu\in \mathrm{K}\end{cases}$$

なるものとし, さらに K の外では 1 未満とする. この時, 任意の $\mu\in\mathfrak{g}^*$ に対して,

$$h(\mu)\cdot t\cdot D_0+(1-h(\mu))\cdot D_0-i\gamma(\mu),\quad t\in[0,1]$$

と定義すると, これは U の外では可逆である. 実際, $\mu\notin U$ に対して, $h(\mu)\cdot t\cdot D_0=0$ で, $(1-h(\mu))\cdot D_0-i\gamma(\mu)=D_0-i\gamma(\mu)$ は, $\mu\notin\mathfrak{O}_V$ だから可逆である. 従って, 上の式は, $t=0$ を代入した $(1-h)\cdot D_0-i\gamma$ と $t=1$ とした $D(V)$ をつなぐコンパクト台を持つホモとピーである. 一方, K 上では, $(1-h)\cdot D_0-i\gamma=-i\gamma$ で, K の外では, $(1-h(\mu))\cdot D_0+\gamma(\mu)=(1-h(\mu))(D_0-i\gamma(\frac{\mu}{1-h(\mu)}))$ は可逆である. 実際, 任意の $\mu\notin K$ に対して, $\frac{\mu}{1-h(\mu)}\notin K$ だから, $\frac{\mu}{1-h(\mu)}\notin\mathfrak{O}_V$ で $D_0-i\gamma(\frac{\mu}{1-h(\mu)})$ は可逆である. 従って, $-i\gamma$ と $(1-h)\cdot D_0-i\gamma$ はコンパクト台を持つホモトピーで結べる. 以上から, $-i\gamma$ と $D(V)$ は $K_G^{\sigma(\mathfrak{g}^*)+\dim\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}^*)_{cpt}$ の同じ元を定めることがわかった. すなわち, $D_*(V)=j_*(V)\in K_G^{\sigma(\mathfrak{g}^*)+\dim\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}^*)_{cpt}$ が示された.

(5) $\pi^N:N\mathfrak{O}\to\mathfrak{O}$ を $\mathfrak{O}$ の $\mathfrak{g}^*$ における法束とする. すなわち, $N\mathfrak{O}\oplus T\mathfrak{O}=T\mathfrak{g}^*|_{\mathfrak{O}}\subset T\mathfrak{g}^*\cong\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$ なる G 同変な直交分解が成り立っているとする. このとき, $\pi_+:\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ を足し算とすると, やはり G 同変で, 例えば 0 切断による $\mathfrak{O}$ の像 $\mathfrak{O}\times\{0\}$ は $\pi_+(\mathfrak{O}\times\{0\})=\mathfrak{O}\subset\mathfrak{g}^*$ にうつる. この π_+ は $N\mathfrak{O}$ の 0 切断の近傍 $\mathfrak{O}\times\{0\}\subset U(\mathfrak{O}\times\{0\})\subset N\mathfrak{O}$ と $\mathfrak{g}^*$ における $\mathfrak{O}$ の環状近傍 $\mathfrak{O}\subset U(\mathfrak{O})\subset\mathfrak{g}^*$ の同一視 $\pi_+:U(\mathfrak{O}\times\{0\})\cong U(\mathfrak{O})$ を与えてくれる. 以下この同一視を自由に使う. 例えば, $U(\mathfrak{O})\cap N_\mu\mathfrak{O}\subset(\mu+\mathfrak{t}_\mu^*)\subset\mathfrak{g}^*$ である. このことに注意して, $D(V)$ を $U(\mathfrak{O})$ に制限するとどうなるか見てみよう. $U(\mathfrak{O})$ の任意の元は $\mu+\theta_\mu$ と書ける ($\mu\in\mathfrak{O}$ および $\theta_\mu\in\mathfrak{t}_\mu^*$). このとき, $D_{\mu+\theta_\mu}=D_\mu-i\gamma(\theta_\mu)$ だったので, これは $S(\mathfrak{g}^*)\otimes V=(S(\mathfrak{t}_\mu^*)\otimes L_{-\rho_\mu}\otimes V_{-\lambda_\mu})\oplus\big(S(\mathfrak{t}_\mu^*)\otimes L_{-\rho_\mu}\otimes V_{-\lambda_\mu}\big)^\perp$ なる直交分解を保つ. $\theta_\mu\neq0$ ではそれぞれの上で可逆なので, 特に $\big(S(\mathfrak{t}_\mu^*)\otimes L_{-\rho_\mu}\otimes V_{-\lambda_\mu}\big)^\perp$ に制限すれば可逆である (この上では $\theta_\mu=0$ でも可逆であった). 一方, $D_{\mu+\theta_\mu}$ を $L_{-\rho_\mu}\otimes S(\mathfrak{t}_\mu^*)\otimes V_{-\lambda_\mu}$ に制限すると $D_\mu=0$ だから $-i\gamma(\theta_\mu)$ となる. これは, $\mathfrak{O}$ 上の $L\otimes V_{\mathrm{Ker}}=\{L_{-\rho_\mu}\otimes V_{-\lambda_\mu}\}_{\mu\in\mathfrak{O}}$ を $\pi^N:N\mathfrak{O}\to\mathfrak{O}$ に関して Thom 写像で写したものを $U(\mathfrak{O}\times\{0\})$ に制限したものに他ならない. $(\pi^N)^*(S(N\mathfrak{O})\otimes L\otimes V_{\mathrm{Ker}})|_{U(\mathfrak{O}\times\{0\})}=\{S(\mathfrak{t}_\mu^*)\otimes L_{-\rho_\mu}\otimes V_{-\lambda_\mu}\}_{\mu+\theta_\mu\in U(\mathfrak{O})}$ であることに注意せよ. また, これが $N\mathfrak{O}\setminus(\mathfrak{O}\times\{0\})$ 上で可逆であったことと, $D(V)$ が $\mathfrak{g}^*\setminus\mathfrak{O}$ では可逆であったことを合わせると, $i_*(L\otimes V_{\mathrm{Ker}})=D_*(V)$ が示された.

(6) Thom 同型定理により j_* は同型写像であり, $j_*^{-1}=(\pi^{\mathfrak{g}^*})_*$ から従う. □

6 σ とは限らない中心拡大の場合

連結コンパクトリー群 G に対して, G^σ とは限らない一般の中心拡大 G^τ について考える. ここでの目標は, 次の写像 D_* を与える cubic Dirac 作用素族を構成することである. 証明は, 述べないが, 前章の話をやり直せばよい.

定理 6.1. $D_*:R^{\tau-\sigma}(G)\cong K_G^\tau(\mathfrak{g}^*)_{cpt}$.

まず連結コンパクト半単純リー群の中心拡大がどんなものであったかを確認しよう (特に必要というわけではないが). コンパクト群 G の $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ による中心拡大 G^{τ_k} があるとき, $G^{\tau_k}\times_{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}U(1)$ は, G の $U(1)$ による中心拡大である. ここで $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ を $U(1)$ の部分群と思っている. このような $U(1)$ による中心拡大を有限巡回群拡大から誘導されると呼ぼう.

命題 6.2. 半単純連結コンパクト群 G の $U(1)$ による中心拡大 G^τ は有限巡回群拡大から誘導される.

証明. 連結コンパクト半単純リー群 G は普遍被覆群 (これはコンパクトになる)$\widetilde{G}$ とその中心で割って得られる中心のないコンパクト群 $\underline{G}$ で挟まれていたことを思い出しておく.

半単純連結コンパクト群 G の $U(1)$ による中心拡大 G^τ はもちろん連結コンパクト群. 一方, そのリー環は $\mathfrak{g} \oplus i\mathbb{R}$ と書ける. したがって, G^τ を適当な有限アーベル群 F によって割ると, $\underline{G} \times U(1)$ と同型なものになる. 実際, G^τ の普遍被覆群は $\widetilde{G} \times \mathbb{R}$ で, この中心の離散部分群で割ったものとして G^τ を再現できるので, それより大きな離散部分群であって, 直積の形をしているもので, さらに $\widetilde{G}$ の中心を含むもので, $\widetilde{G} \times \mathbb{R}$ を割ると, $\underline{G} \times U(1)$ と同型なものが現れる. よって, $G^\tau \to \underline{G} \times U(1)$ は有限アーベル群 F による商である. この写像によって, $\underline{G}$ を引き戻した群を $\underline{G}^{\tau_F}$ と書く. すると, $\underline{G}^{\tau_F} \cap U(1)$ は $U(1)$ の有限部分群だから, ある k があって, $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ の形をしていなければならない. よって $G = G^\tau/U(1) = \underline{G}^{\tau_F}/\underline{G}^{\tau_F} \cap U(1)$ に注意すると $G^{\tau_k} := \underline{G}^{\tau_F}$ は G の $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 中心拡大であることが分かり, さらに $G^\tau = G^{\tau_k} \times_{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} U(1)$ となる. □

系 6.3. 単連結コンパクトリー群 (従って半単純コンパクトリー環) の中心拡大は自明なものしかない.

中心拡大が $H^3(BG, \mathbb{Z})$ で分類されることがよく知られているので,

系 6.4. $H^3(BG, \mathbb{Z})$ の元はすべてトージョン.

一つ例を挙げておこう. $1 \to U(1) \to U(n) \to PU(n) \to 1$ と $1 \to SU(n) \to U(n) \to U(1) \to 1$ に注目すると, $SU(n) \to PU(n)$ なる写像があることがわかる. このとき, $1 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to SU(n) \to PU(n) \to 1$ が成り立つ. すなわち, $PU(n)$ の $U(1)$ による中心拡大は, $\mathbb{Z}/nZ$ による中心拡大を経由する. 実際, $PU(n)$ の元で $g \in U(n)$ から来るのものは, $\det(g)^{-1/n}g \in SU(n)$ からも来ている. ここで, $\det(g)^{-1/n}$ は $\det(g)^{-1}$ の n 乗根を一つ取っている. 従って, 全射は良い. また, この核が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ なのは, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = U(1) \cap SU(n)$ であることから分かる.

さて, 本題に戻ろう. リー群 G の中心拡大 G^τ に対して, リー環の中心拡大 $0 \to i\mathbb{R} \to \mathfrak{g}^\tau \to \mathfrak{g} \to 0$ があるが, $\mathcal{A}_G^\tau$ をこれの切断全体のなす集合とする. $\mathfrak{g}^\tau \to \mathfrak{g}$ を π と書くと, これは, $\mathcal{A}_G^\tau = \{A : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}^\tau | \pi \circ A_0 = id_{\mathfrak{g}}\}$ と書け, $i\mathfrak{g}^*$ をモデル空間とするアフィン空間である. 実際, $A_0, A_1 \in \mathcal{A}_G^\tau$ に対して, $A_1(X) - A_0(X)$ をの行き先を $\mathfrak{g}$ に落とすと, 0 だから, これは $i\mathbb{R}$ の元を定めているし, 任意の $i\mu \in i\mathfrak{g}^*$ に対して, $A_0 + i\mu$ が切断を定めるを定めることは明らかである.

$\mathcal{A}_G^\tau$ は G の作用を持つ. 実際, 定義域の $\mathfrak{g}$ へのアジョイント作用と値域への $\mathfrak{g}^\tau$ へのアジョイント作用を両方使って, 決まる. ここで, G の $\mathfrak{g}^\tau$ へのアジョイント作用は, G^τ へ一旦持ち上げて定義し, 持ち上げによらないことを言うことで定まることが分かる, ところで, $\mathcal{A}_G^\sigma \cong i\mathfrak{g}^*$ は中心拡大の作り方から自然に作れる. 実際, $\mathfrak{spin}(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{so}(\mathfrak{g}^*)$ が与える自然な切断 A_0 を持っていたので, $A \mapsto A - A_0$ とすれば良い. A_0 が G 不変であることに注意すると, これは, G 同変アフィン空間としての同型である. 同様のことが一般の場合でもできる. 実際 G がコンパクトなので, G 不変な切断 $A_0 \in \mathcal{A}_G^\tau$ が取れるので, これを用いて $\mathcal{A}_G^\tau \cong i\mathfrak{g}^*$ が $A \mapsto A - A_0$ で定まり, G 同変アフィン空間としての同型になっている (従って, この章の最初に書いた $K_G^{\tau + \dim \mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}^*)_{cpt}$ は $K_G^{\tau + \dim \mathfrak{g}^*}(\mathcal{A}_G^\tau)_{cpt}$ とした方が自然である). 切断 A_0 はリー環の準同型であることに注意せよ.

まず, V を G のレベル $\tau - \sigma$ 射影表現とする ($\mathfrak{g}^{\tau - \sigma}$ の表現と思うときには $(R^{\tau - \sigma}, V)$ と書く). $S(\mathfrak{g}^*)$ は G のレベル σ 射影表現であったので, $S(\mathfrak{g}^*) \otimes V$ は G のレベル τ 射影表現になる. これに作用する cubic Dirac 作用族を作ろう. ここでパラメータ空間は $\mathcal{A}_G^\tau$ である. $\mathcal{A}_G^\tau$ の元として A を取る. $\mathfrak{g}^\sigma \oplus \mathfrak{g}^{-\sigma+\tau}$ に $i\mathbb{R}$ を対角に埋め込んで, 割ったものを $\mathfrak{g}^\sigma \oplus \mathfrak{g}^{-\sigma+\tau}/i\mathbb{R}$ と書くと, $\mathfrak{g}^\sigma$ の自然な切断 A_0 を使うことで, さらに左側だけを $\mathfrak{g}$ で割ることができて, この商は $\mathfrak{g}^{-\sigma+\tau}$ となる. $\mathfrak{g}^\tau \subset \mathfrak{g}^\sigma \oplus \mathfrak{g}^{-\sigma+\tau}/i\mathbb{R}$ に注意してやれば, 自然な同型 $\mathfrak{g}^\tau \cong \mathfrak{g}^{-\sigma+\tau}$ が得られる. 従って, 自然な同型 $\mathcal{A}_G^\tau \cong \mathcal{A}_G^{\tau-\sigma}$ が得られる (この対応を $A \mapsto A^{-\sigma}$ と書く). これは G 同変であり, $i\mathfrak{g}^*$ アフィン空間としての同型である. e_a を $\mathfrak{g}$ の基底, e^a をその双対基底とする. このとき, 与えられた $A \in \mathcal{A}_G^\tau$ に対して, $D_A := \gamma^a \otimes R^{\tau-\sigma}(A^{-\sigma}(e_a)) + \frac{1}{3}\gamma^a \sigma_a \otimes 1$ と定義する. 特に任意の $i\mu \in i\mathfrak{g}^*$ に対して, $(A - i\mu)^{-\sigma} = A^{-\sigma} - i\mu$ であることと, $R^{\tau-\sigma}$ が射影表現であることに注意すれば,

$D_{A-i\mu} := \gamma^a \otimes R^{\tau-\sigma}(A^{-\sigma}(e_a)) - i\gamma(\mu) + \frac{1}{3}\gamma^a\sigma_a \otimes 1$ となっていることがわかる．

この言葉遣いの元で，$\tau = \sigma$ の場合を振り返ってみる．V が G の表現だから，レベル o 射影表現と思える．ここでレベル o というのは，自明な中心拡大を考える事を意味する．$A \in \mathcal{A}_G^\sigma$ が与えられると $A^{-\sigma} \in \mathcal{A}^{o=\sigma-\sigma}$ が決まるが，自然な切断 A_0 を使うと，ある $i\mu \in i\mathfrak{g}^*$ があって，$A = A_0 - i\mu$ と書けるので，$A^{-\sigma} = id_{\mathfrak{g}} - i\mu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \oplus i\mathbb{R} = g^o$ と書ける．従って，$D_A = \gamma^a \otimes R^o(A^{-\sigma}(e_a)) + \frac{1}{3}\gamma^a\sigma_a \otimes 1 = \gamma^a \otimes (R(e_a) - i\mu(e_a)) + \frac{1}{3}\gamma^a\sigma_a \otimes 1 = \gamma^a \otimes R_a - i\gamma(\mu) + \frac{1}{3}\gamma^a\sigma_a \otimes 1$ となって，3 章の D_μ に他ならないことが分かる．

7 ループ群に付随する Cubic Dirac 作用素族

7.1 一般の群について

D_* の一般的な作り方を簡単に述べておこう．ここではコンパクト群，ループ群といった個々のケースではなく，より一般的な話を書く．したがって，ここに書かれることはそのままでは正しくない部分も出てくるので，適切な設定の下で正当化される必要がある事を断っておく．具体的な正当化の仕方については，コンパクト群に関してはすでに述べた．ループ群については次節で少し述べる．

(有限次元または位相) リー環の中心拡大について思い出そう．

定義 7.1. リー環 $\mathfrak{L}$ の $i\mathbb{R}$ による中心拡大 $\mathfrak{L}^\tau$ とは，ベクトル空間としては $\mathfrak{L} \oplus i\mathbb{R}$ であって，リーブラケットが，

$$[(X,u),(Y,v)] := ([X,Y],\tau(X,Y))$$

で定義されるリー環のことである．ここで，$\tau : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to i\mathbb{R}$ は (連続) 歪対称双線型形式であって，$\tau([X,Y],Z) - \tau(X,[Y,Z]) + \tau([Z,X],Y) = 0$ をみたすもの，すなわち，$\mathfrak{L}$ 上の $i\mathbb{R}$ 値 2 コサイクルである．

$\mathfrak{L}^\tau$ が実際にリー環の構造を持つことや $\mathfrak{L}^\tau$ が $i\mathbb{R}$ を中心としてもつことは簡単に確かめられる．また，$\mathfrak{L}^\tau$ が $\mathfrak{L}$ の $i\mathbb{R}$ による中心拡大であることを，抽象的に定義することと差はない．より強く次のようなことが成り立つ．

命題 7.2. リー環 $\mathfrak{L}$ の $i\mathbb{R}$ による中心拡大の同型類は，$H^2(\mathfrak{L}, i\mathbb{R}) (\cong H^2(\mathfrak{L},\mathbb{R}))$ で分類される．

以上の中心拡大に関する議論は，$i\mathbb{R}$ によるものでない場合でも同様である．また，$\mathfrak{L}$ が無限次元であっても，適当な位相の条件のもとで，正当化できる．

$\mathfrak{L}$ を (加算) 無限次元かもしれない実リー環とし，以下のような事を仮定する．

- アジョイント作用で不変な負値対称形式 B を持つとする．このとき，$g := -B$ という正値対称形式を考え，以下これを用いる．さらに，$\mathfrak{L}^* := \{g(X,\cdot) | X \in \mathfrak{L}\}$ とする．この上には，g^* なる正値対称形式が定まる．また，これは $\mathfrak{L}$ によるコアジョイント作用 ad^* を持つ．複素化を考えた場合には複素線型に g などを拡張しておき，同じ記号で書く．
- $\mathfrak{L}$ は次を満たすような有限次元部分リー環 $\mathfrak{L}^0$ を持つとする (この章では，これを $\mathfrak{L}$ の頭と呼ぶ)．すなわち，$\mathfrak{H} := \mathfrak{L}^0_{\mathbb{C}}$ および $\mathfrak{N} := \mathfrak{L}^{0,\perp}_{\mathbb{C}}$ と書くとき，$\mathfrak{L}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{N}_+ \oplus \mathfrak{N}_-$ なる頭つき極分解があるとする．ここで頭つき極分解とは，$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_+ \oplus \mathfrak{N}_-$ はベクトル空間としての極分解，すなわち，g に関して $\mathfrak{N}_+$ および $\mathfrak{N}_-$ はイソトロピックで，互いに双対的であり，さらに，それぞれが部分リー環であると共に，それぞれが $\mathfrak{L}^0$ のアジョイント作用により保たれていることを意味する ($\mathfrak{L}^0$ のアジョイント作用が $\mathfrak{L}^{0,\perp}$ を保つことは g がアジョイント作用で不変であることからいつでも正しい)．このとき，$\mathfrak{N}_+^* := \{g(X,\cdot) | X \in \mathfrak{N}_-\}$ などと定義すると $\mathfrak{L}^0$ の表現空間としては $\mathfrak{N}_- \cong \mathfrak{N}_+^*$ が g を使って成り立つ．
- 簡単のため，頭 $\mathfrak{L}_0$ は偶数次元であるとする．

以上の設定の下で，まず $\mathfrak{L}$ のスピン射影表現 σ について述べよう．クリフォード代数を $Cl(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^*) := Cl(\mathfrak{N}^*) \otimes$

$Cl(\mathfrak{H}^*)$ とし, スピン加群を $S(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^*) := S(\mathfrak{N}^*) \otimes S(\mathfrak{H}^*)$ と定義する. $\mathfrak{H}^*$ は有限次元なので, これに付随する部分については問題ない. しかし, 無限次元かもしれない $\mathfrak{N}^*$ に付随する部分に関しては, 議論が必要である. それを簡単に説明する. $Cl(\mathfrak{N}^*)$ は代数的なものと思って考える, すなわち, 任意の元は有限個の積を有限個足しあげた形をしている (後で, '完備化' することで, ある無限和は許されるようになる). そして, $S(\mathfrak{N}^*)$ はベクトル空間としては, $\bigwedge \mathfrak{N}_+^*$ と同型なものとする (やはり, 代数的なものと思っている). ここで, とりあえずはただの記号であるが $\det \mathfrak{N}_-^*$ なる 1 次元ベクトル空間を考え, $S(\mathfrak{N}^*)$ を $S(\mathfrak{N}^*) := \bigwedge \mathfrak{N}_+^* \otimes \det \mathfrak{N}_-^*$ と定義する. このときクリフォード作用を, 次で定義する. $\mu \in \mathfrak{N}_+^*$ のときは, $\det \mathfrak{N}_-^*$ の部分は固定したまま $\gamma(\mu) = \mu \wedge$ で, $\mu \in \mathfrak{N}_-^*$ のときは, $\det \mathfrak{N}_-^*$ の部分は固定したまま $\gamma(\mu) = 2\iota_\mu$ で作用する. ここで, ι_μ は $\nu \in \mathfrak{N}_+^*$ に対して $\iota_\mu(\nu) = -g^*(\mu, \nu)$ と定義し, これを $\bigwedge \mathfrak{N}_+^*$ の偶奇による $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数を考慮して, $\bigwedge \mathfrak{N}_+^*$ 上に拡張したもの, すなわち次数つき内部積である. 以上から, 特に, $Cl(\mathfrak{N}^*) \subset \mathrm{End}(S(\mathfrak{N}^*))$ である.

ところで, $Cl(\mathfrak{N}^*)$ の元は $T(\mathfrak{N}^*)$ の有限和から来るものしか, 含んでいなかった. しかし, $\mathrm{End}(S(\mathfrak{N}^*))$ の元としては無限和が意味を持つことがある. 例えば, $\{e_-^i\}$ を $\mathfrak{N}_-^*$ の基底とする. このとき, $\sum_i \gamma(e_-^i)$ は, 明らかに $\mathrm{End}(S(\mathfrak{N}^*))$ の元と思える ($\bigwedge \mathfrak{N}_+^*$ の元は有限和しか考えていなかったことに注意する). よって, このような元の積も $\mathrm{End}(S(\mathfrak{N}^*))$ の元として, 意味を持つ. もう少し説明する. まず, フィルトレーションを持つベクトル空間としての同型 $Cl(\mathfrak{N}^*) \cong \bigwedge \mathfrak{N}^*$ があることは無限次元の場合でも正しい (いわゆるシンボル写像である). ところで, 右辺は $\bigwedge \mathfrak{N}_+^* \otimes \bigwedge \mathfrak{N}_-^*$ と書けることに注意して, $n : Cl(\mathfrak{N}^*) \cong \bigwedge \mathfrak{N}_+^* \otimes \bigwedge \mathfrak{N}_-^*$ を順序つきシンボル写像と呼ぼう. この右辺で無限和も許したとき, $\bigwedge \mathfrak{N}_+^* \overline{\otimes} \bigwedge \mathfrak{N}_-^*$ と書くことにする. ところで, $\bigwedge \mathfrak{N}_+^* \otimes \bigwedge \mathfrak{N}_-^*$ は $S(\mathfrak{N}^*) \otimes S(\mathfrak{N})$ とみなせ, $\bigwedge \mathfrak{N}_+^* \overline{\otimes} \bigwedge \mathfrak{N}_-^*$ は同様に $S(\mathfrak{N}^*) \overline{\otimes} S(\mathfrak{N})$ とみなせる. 一方で, $\mathrm{End}(S(\mathfrak{N}^*))$ は $S(\mathfrak{N}^*) \overline{\otimes} S(\mathfrak{N})$ の部分空間とみなせる. このとき, 順序つきシンボル写像 n が次のように拡張する.

$$\begin{tikzcd} Cl(\mathfrak{N}^*) \arrow[r, "n"] \arrow[d] & \bigwedge \mathfrak{N}_+^* \otimes \bigwedge \mathfrak{N}_-^* \arrow[d] \\ \mathrm{End}(S(\mathfrak{N}^*)) \arrow[r, "n"] & \bigwedge \mathfrak{N}_+^* \overline{\otimes} \bigwedge \mathfrak{N}_-^* \end{tikzcd}$$

このことから, $\mathrm{End}(S(\mathfrak{N}^*))$ を $Cl(\mathfrak{N}^*)$ の完備化と思うことにしよう. 同様に, $\mathrm{End}(S(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^*))$ を $Cl(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^*)$ の完備化と思うことにし, 順序つきシンボル写像も n と書くことにする. ($\mathfrak{H}$ は有限次元だったから良く分かっている).

さて, ここで $\mathfrak{L}$ の $S(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^*)$ への射影表現, すなわち, スピン射影表現 σ を次のように定義する.

定義 7.3. e_a を $\mathfrak{L}$ の基底とし, その双対を $e^a := e_a^*$ と書く. このとき, $X \in \mathfrak{L}$ に対して, $\sigma(X) := \frac{1}{4} \sum \gamma([e_a, X]^*) \gamma(e^a)$ とおく.

このとき, これは $\mathrm{End}(S(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^*))$ の元を定めること, 及び $[\sigma(X), \sigma(Y)]$ と $\sigma([X,Y])$ が $\mathrm{End}(S(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^*))$ の中心元を除いて決まること分かり, 射影表現になっている. これを本当に表現と思うための $\mathfrak{L}$ の中心拡大を $\mathfrak{L}^\sigma$ と書き, その表現を $\widehat{\sigma}$ と書くと, 上記の σ は, $\mathfrak{L}^\sigma \to \mathfrak{L}$ のある切断 A_0 を用いて, $\widehat{\sigma} \circ A_0$ と書かれる ($\mathfrak{L}$ がコンパクト群のリー環でない場合には, σ は表現になるかは, 分からない. というのは, A_0 がリー環の準同型になるとは限らないからである).

いま, $\mathfrak{L}$ の中心拡大 $\mathfrak{L}^{-\sigma+\tau}$ が与えられたとし, さらに, これに関する射影表現 $(R^{-\sigma+\tau}, V)$ が与えられたとすると, 中心拡大 $\mathfrak{L}^\tau$ に関する射影表現 $S(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^*) \otimes V$ が決まる. このとき, $\mathfrak{L}^\tau \to \mathfrak{L}$ の切断 A をとると, $A = A_0 \oplus A^{-\sigma}$ となるような $\mathfrak{L}^{\sigma+\tau}$ の切断 $A^{-\sigma}$ が取れる. このとき, cubic Dirac 作用素 D_A が $\mathrm{End}(S(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^*)) \overline{\otimes} U(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^{-\sigma+\tau})$ の元として, 次のように定義される.

定義 7.4. $D_A := \sum \gamma^a \otimes R^{-\sigma+\tau} \circ A^{-\sigma}(e_a) + \frac{1}{3} \gamma^a \sigma_a$.

ここで, $\frac{1}{3}\gamma^a \sigma_a$ は cubic term と呼ばれるもので, 形式的には $\frac{1}{2}\Omega(X,Y,Z) := \frac{1}{12} g(X, [Y,Z])$ なる $\mathfrak{L}$ 上の cubic form をクリフォード作用させたものと思える (適切に処理すれば正当化できる).

$\tau-\sigma$ が自明な場合, すなわち, $\mathfrak{L}^o=\mathfrak{L}\oplus i\mathbb{R}$ の場合を書いてみよう. $\mathfrak{L}$ の表現 (R,V) が与えられたとする. これを $\mathfrak{L}^o$ に関する射影表現と思っても, 同じ記号を使うことにする. このとき, 特別な場合として, cubic Dirac 作用素 D_0 が $\mathrm{End}(S(\mathfrak{L}^*_{\mathbb{C}}))\overline{\otimes}U(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}})$ の元として, 次のように定義される ($A_0^{-\sigma}$ が自明な L^o の切断であることに注意せよ).

定義 7.5. $D_0:=\sum\gamma^a\otimes R_a+\frac{1}{3}\gamma^a\sigma_a$.

これは, $\mathfrak{L}^\sigma\to\mathfrak{L}$ の切断 A_0 に付随した cubic Dirac 作用素と思ってよい. 続いて, $\mathfrak{L}^*$ をパラメータとする cubic Dirac 作用素族を作ろう.

定義 7.6. $D_\mu:=\sum\gamma^a\otimes R_a-i\gamma(\mu)+\frac{1}{3}\gamma^a\sigma_a$.

これは, $\mathfrak{L}^\sigma\to\mathfrak{L}$ の切断 $A:=A_0-i\mu$ に付随した cubic Dirac 作用素と思ってよい. 実際, $\mathfrak{L}^*$ の元 μ が $X\mapsto X-i\mu(X)$ なる自明な中心拡大 $\mathfrak{L}^o:=\mathfrak{L}\oplus i\mathbb{R}$ の切断を与えるが, $\mathfrak{L}^\sigma\to\mathfrak{L}$ の切断 A の誘導する $\mathfrak{L}^o:=\mathfrak{L}\oplus i\mathbb{R}$ の切断に他ならないからである. まとめると, 次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{L}^* & \longrightarrow & \mathrm{End}(S(\mathfrak{L}^*_{\mathbb{C}}))\overline{\otimes}U(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}})\\ \big\downarrow & & \big\downarrow\\ \mathcal{A}^\sigma_{\mathfrak{L}} & \longrightarrow & \mathrm{End}(S(\mathfrak{L}^*_{\mathbb{C}}))\overline{\otimes}U(\mathfrak{L}^o_{\mathbb{C}}).\end{array}$$

ここで, $A^\sigma_{\mathfrak{L}}$ を経由する写像は, $\mu\mapsto A_0-i\mu:=A\mapsto D_A$ であり, $\mathrm{End}(S(\mathfrak{L}^*_{\mathbb{C}}))\overline{\otimes}U(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}})$ を経由する写像は, $\mu\mapsto D_\mu\mapsto D_A$ である.

7.2 ループ群について

$\mathfrak{L}$ がループリー環の場合を扱う. 以下, 群 G は半単純連結コンパクト群とする. 関数や写像などをどのようなクラスで取るかは明記しないので, 適宜よいクラスを指定する必要があることを注意しておく.

定義 7.7. ループ群 LG を S^1 から G への写像全体に, 点の行き先ごとに積や逆元を取ることによって, 群構造をいれたものとし, ループリー環 $L\mathfrak{g}$ も同様に定義する. より一般に, S^1 上の G 主束 P を考える. このとき, これに付随するループ群 L_PG をこの主束のゲージ群, すなわち, $P\times_{(G,Ad)}G$ の切断の全体とし, ループリー環 $L_P\mathfrak{g}$ は $P\times_{(G,Ad)}\mathfrak{g}$ の切断の全体とする.

P が自明なとき, S^1 のパラメータを θ で書いてやると, 外微分 d($\frac{d}{d\theta}$ に当たるもの) が, P の自明化が与える平坦接続を通じて持ち上がり, それを再び d と書く. このとき, $\frac{1}{i}d$ が $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の (本質的) 自己共役作用素と思えて, これは固有分解をもち, 固有値 0 のところが $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ で, 正のところが $\bigoplus_{n>0}\exp(n\theta)\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 負のところが $\bigoplus_{n>0}\exp(-n\theta)\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ となる. 順に $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_+$, $\mathfrak{N}_-$ とおけば, 頭を $\mathfrak{H}$ とする, 前節の意味での頭つきの極分解が得られる. ここで考える負定値計量 $B=<<-,->>$ は, $\mathfrak{g}$ 上のアジョイント作用で不変な負定値計量 $<-,->$ を用いて, $<<X,Y>>:=\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}<X(\theta),Y(\theta)>d\theta$ で与えている. 例えば, $\mathfrak{g}$ のキリング形式に, ある定数倍したもの $<-,->_\sigma$ を用いて得られる $<<-,->>_\sigma$ が考えられる (定数倍するのはループリー群の拡大が存在するために必要だが, ここでは述べない). P が自明でないときも, d に当たるものとして, ある平坦接続 d_{ω_0} がとれて, 同じようにできるが省略する.

中心拡大についての次の定理は基本的である.

定理 7.8. リー環 $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}$ によるアジョイント作用つき空間 $\mathfrak{g}$ 上の不変双線型形式 $<\cdot,\cdot>$ をとる. このとき, 外微分 d を用いて, $\tau(X,Y):=\frac{i}{2\pi}\int_{S^1}<X,dY>=\frac{i}{2\pi}\int_{S^1}<X(\theta),\frac{d}{d\theta}Y(\theta)>d\theta$ と定義すると, これは $i\mathbb{R}$ 値の $L\mathfrak{g}$ 上の 2 コサイクルである (このとき, $<\cdot,\cdot>$ を $<\cdot,\cdot>_\tau$ と書く).

G を半単純コンパクト群とし, そのリー環を $\mathfrak{g}$ と書いたとき, ループリー環 $L\mathfrak{g}$ の $i\mathbb{R}$ による中心拡大は, 同型

を除いて上記の $i\mathbb{R}$ 値 2 コサイクル τ から作られるもの $L\mathfrak{g}^{\tau}$ しかないことが知られている.

S^1 上の (自明な)G 主束 P の平坦接続の全体を $\mathcal{A}_P$ と書く. このとき, $d+\omega \in \mathcal{A}_P$ を取ると, これは, $L\mathfrak{g}^{\tau} \to L\mathfrak{g}$ の切断 A を誘導する. 実際, $X \mapsto X \oplus i << X, \omega >>_{\tau}$ と定めればよい. よって, 前節に話は帰着され, $\mathcal{A}_P$ をパラメータ空間とする cubic Dirac 作用素族が得られた. 適切な解析のもとで, フレッドホルム性などを示す必要があるが, 次の写像が定義できる (有界作用素に直すことは難しくない). この写像の正当化や定理の証明などより正確なことは, [11, 10, 9] を見よ.

定理 7.9. $D_* : R^{\tau-\sigma}(LG) \cong K_G^{\tau+\dim G}(G)$.

左辺は, レベル τ の可積分な既約表現であって, 最低ウェイト表現の同型類全部から作られる半群の群完備化である.

右辺の同変ツイストは FHT 同変ツイスト $(\mathcal{A}_P \to G, LG^{\tau})$ から作られる. これの定義を説明しておく. まず S^1 の一点 s を固定する. S^1 の向きを固定しておくと, $\mathcal{A}_P \to G$ は与えられた平坦接続から s でのホロノミーをとるという操作で与えられ, このファイバーは, s を G の単位元に移す基点つきループ群である. この群を構造群として, $\mathcal{A}_P \to G$ は主束になっている. また, ループ群をこの群で割ると G になる. $\mathcal{A}_P$ は自然にループ群の作用を持ち, G は G の共役作用を持つ. 特に, $\mathcal{A}_P \to G$ はループ群の作用で同変になっており, 2 章で述べた, FHT 同変ツイストに他ならない. ここで, LG のレベル τ 射影表現で安定なものは, レベル τ の可積分な既約表現であって, 最低ウェイト表現になっているもの全部の直和に無限次元ヒルベルト空間をテンソルしたものでとる. これを $H_{LG,\tau}$ と書く. このとき, $K_G^{\tau}(G) = [\mathcal{A}_P, \mathrm{Fred}'(H_{LG,\tau})]^{LG}$ である.

付録 A　捩れ K 群の定義の方法

このノートでは, ツイスト及び捩れ (同変)K 群の定義に Fledholm 作用素を用いたものを採用した. しかしここでは, 異なる視点からこれらについて書く.

本文では, ツイストを Fred 束として記述した. しかし, 以下のような考え方もできよう. $K(X)$ は X 上の有限次元ベクトル束の同型類すべてのなす集合を考えることで定義されたのであった. そこで, ベクトル束の代わりに射影空間束を考えるとどうなるだろうかと考えてみる. つまり, 大域的にはベクトル束に持ち上がらないが, 局所的にはベクトル束に持ち上がり, 貼り合わせが, $U(1)$ で割ったあとではうまくいくものを考えてみる.

しかし, 一般には 2 つの射影空間束の '直和' は考えられないので, 有限次元射影空間束の同型類すべてのなす集合をモノイドとみなすのは難しい. そこで, 射影空間束を同じ 'レベル' のものだけに限って取り扱うという事を考える. ここで 'レベル' といっているのは, 射影空間束を貼り合わせによって作る際に現れる, X 上の $U(1)$ 値 2 コサイクル τ のことである. 実際, 固定されたレベル τ を用いた貼り合わせによって得られる 2 つの射影空間束には '直和' が定義でき, これによってレベル τ の有限次元射影空間束の同型類すべてのなす集合はモノイドになり, この群完備化によってレベル τ の K 群 '$K^{\tau}(X)'$ が定義される. ところで, この X 上の $U(1)$ 値 2 コサイクル τ を使って得られる無限次元の $PU(H)$ 主束 P を考えるならば, これは本文ではツイストと呼ばれていたものに他ならない. したがって, 捩れ K 群 $K^P(X)$ が定義される. しかし実は, もしレベル τ の有限次元射影空間束が存在するならば, $K^P(X) \cong$ '$K^{\tau}(X)'$ なる自然な同型がある. 'もし' と断ったのは, もしレベル τ の有限次元射影空間束が存在するならば, その 2 コサイクル τ はトージョン元であるからである. つまり, 2 コサイクル τ がトージョン元でないならば, '$K^{\tau}(X)'$ は自明になってしまうからである. 従って, ここで書いた非常に素朴な発想による捩れ K 群の定義は, 真っ当なものではあるが, トージョン元である 2 コサイクルによるツイストしか扱えないという意味で, 非常に限定的であると言わざるを得ない. これを乗り越えるには, 本文で定義したように, 無限次元的なものを組み込んで考えないといけないようである (有限次元的なことにこだわって, 捩れ K 群を取り扱ったものに [13] がある).

レベル τ の有限次元射影空間束が存在するならば, その 2 コサイクル τ はトージョン元であることについて説明しておこう. X 上に, P なる $PU(n)$ 主束が与えられたとする. このとき, これは, $H_2(X, U(1))$ の元を定めるのであったが, 特に, $H_2(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の元を経由して定めることができる. 一般に無限次元かもしれない P から $H_2(X, U(1))$ の元をどのように作ったかを簡単に書いておく. P を局所自明化しておいて, おのおのの座標上で, $U(H)$ 束に持ち上げたときに, それを持ち上げた変換関数で, 再び貼りあわせようとすると $U(1)$ だけずれ, これが $U(1)$ 値コサイクルを与えるのあった. そこで, $H = \mathbb{C}^n$ のときには, 持ち上げた変換関数を, 必要ならばその値に行列式の n 乗根の逆元を書けることで, $SU(n)$ 値に取り直す事ができるので, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 値コサイクルが得られ, これは, もとの $U(1)$ 値コサイクルと $H_2(X, U(1))$ において同じ元を定めることも確かめられる. 特に有限次元の P は $H_2(X, U(1))$ のトージョン元に対応していることが分かる.

レベル τ の有限次元射影空間束が存在するならば, $K^P(X) \cong$ '$K^\tau(X)'$ なる自然な同型があることについても説明しておこう. 左から右を与えよう. P はレベル τ によるすべての有限次元 $PU(n)$ 束 P_n と P の直和に簡約される. このことから, 捩れ K 群の任意の元に対して, 十分大きな $PU(n)$ 束 P_n を取っておけば, それと P の直和に簡約したところで, 無限次元パートの $\mathrm{Fred}(H)$ では可逆な元を与える. よってこの $PU(n)$ 束 P_n が求めるものである. (この $PU(n)$ 束 P_n は, 本当は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数つきで考えねばならない.) 右から左を作る. 右辺の元 P_n が与えられたとする. まず, 次を考える. $[X, P \oplus P_n \times_{P(U(H)\times U(n))} \mathrm{Fred}(H)] \times [X, (P \oplus P_n) \times_{P(U(H)\times U(n))} \mathrm{Fred}(\mathbb{C}^n)] \to [X, (P \oplus P_n) \times_{P(U(H)\times U(n))} (\mathrm{Fred}(H) \oplus \mathrm{Fred}(\mathbb{C}^n))] \to [X, (P \oplus P_n) \times_{P(U(H)\times U(n))} \mathrm{Fred}(H \oplus \mathbb{C}^n)] \cong [X, (P) \times_{PU(H)} \mathrm{Fred}(H)]$. 最後のところは, $P \oplus P_n \cong P$, $H \oplus \mathbb{C}^n \cong H$ および $P(U(H) \times U(n)) \subset PU(H \oplus \mathbb{C}^n) \cong PU(H)$ を用いた. そこで, $[X, P \oplus P_n \times_{P(U(H)\times U(n))} \mathrm{Fred}(H)] \cong [P \oplus P_n, \mathrm{Fred}(H)]^{P(U(H)\times U(n))}$ の元として, $p \to id_H$ を取り, $[X, (P \oplus P_n) \times_{P(U(H)\times U(n))} \mathrm{Fred}(\mathbb{C}^n)] \cong [P \oplus P_n, \mathrm{Fred}(\mathbb{C}^n)]^{P(U(H)\times U(n))}$ の元として, $p \to 0$ を取り, それらの組を $[X, (P) \times_{PU(H)} \mathrm{Fred}(H)] \cong [P, \mathrm{Fred}(H)]^{PU(H)}$ の元と見たもの s_{P_n} と書いて, P_n に対応させる. ここで, $P(U(H) \times U(n)) \to PU(H)$ および $P(U(H) \times U(n)) \to PU(n)$ なる全射を使った. このとき, s_{P_n} の P の各点での核は V で, 余核はないので, これを射影化したものが X 上にならび, それに付随する $PU(n)$ 束を取ると P_n が復元される.

次に C^* 代数を用いる方法についても簡単に触れておく. P を X 上の $PU(H)$ 主束とする. このとき, C^* 代数 $\Gamma(P \times_{PU(H)} K(H))$ に対して K 理論を考えると, これは捩れ K 群に他ならない. これを考えるメリットは, C^* 代数の K 理論について知られていることは何でも自由に使えることであろう. また, 捩れ同変 K 群についても, 考えているツイストに対応する C^* 代数を適切に定義してやると, その K 群として再現できる.

付録 B　非可換 Weil 代数

ここでは, Cubic Dirac 作用素の定義の理解の仕方として非可換 Weil 代数を考える. より幾何学的な意味づけは, [10] のイントロダクションを見よ.

まず通常の Weil 代数の定義を思い出そう.

定義 付録 B.1. 実リー環 $\mathfrak{g}$ に対して, 外積代数 $\bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ 及び対称代数すなわち $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の多項式環 $P(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を考え, そのテンソルとして, Weil 代数を $W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) := \bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \otimes P(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ で定義する.

外積代数 $\bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ のある種の量子化あるいは非可換化として, クリフォード代数 $Cl(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)$ を考え, 対称代数 $P(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ のある種の量子化あるいは非可換化として, 普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を考えることは, よくなされることであるので, Weil 代数 $W(\mathfrak{g})$ のある種の量子化あるいは非可換化として, それらのテンソルを考えるのは自然だろう.

定義 付録 B.2. 実リー環 $\mathfrak{g}$ に対して, クリフォード代数 $Cl(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)$ および普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を考え, そのテンソルとして, 非可換 Weil 代数を $\mathcal{W}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) := Cl(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*) \otimes U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ で定義する.

ところで, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ 上の Dirac 作用素は, $\mathcal{W}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = Cl(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*) \otimes U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の言葉で書くと, $D_L := \sum \gamma^a \otimes R_a$ と書

けたが, この定義自体は一般の $\mathfrak{g}$ でも意味を成す．しかし, これには cubic term は現れていない．ところが次のように考えると cubic term が比較的自然に現れる．3 章で扱った表現 σ を使って代数 $Cl(g_{\mathbb{C}}^*) \rtimes_\sigma U(g_{\mathbb{C}})$ を次のように定義する．これはベクトル空間としては $Cl(g_{\mathbb{C}}^*) \otimes U(g_{\mathbb{C}})$ でこの元を $\sum a \otimes b$ と書くかわりに $\sum a \rtimes b$ と書こう．このとき積演算は次のように定義されている．

- $\gamma^a \rtimes 1 \cdot \gamma^b \rtimes 1 = \gamma^a \gamma^b \rtimes 1$
- $\gamma^a \rtimes 1 \cdot 1 \rtimes e_b = \gamma^a \rtimes e_b$
- $1 \rtimes e_a \cdot 1 \rtimes e_b = 1 \rtimes e_a e_b$
- $1 \rtimes e_b \cdot \gamma^a \rtimes 1 = \gamma^a \rtimes e_b + [\sigma_b, \gamma^a] \rtimes 1$

ところが, 実は次が成り立つ．

命題 付録 B.3. 代数として, $\Phi : Cl(g_{\mathbb{C}}^*) \rtimes_\sigma U(g_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{W}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. ここで $\Phi(\gamma^a \rtimes 1) := \gamma^a \otimes 1$ および $\Phi(1 \rtimes e_a) := 1 \otimes R_a + \sigma_a \otimes 1$ である．

すなわち, $Cl(g_{\mathbb{C}}^*) \rtimes_\sigma U(g_{\mathbb{C}})$ は $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ の素朴な生成元 $1 \otimes R_a$ 及び $\gamma^a \otimes 1$ ではなく, σ で捻った生成元 $\Phi(1 \rtimes e_a)$ 及び $\Phi(\gamma^a \rtimes 1)$ を基本的なものとして考えたものと思える．この生成元を用いて, 素直に 'Dirac 作用素' を作ると次のようになる．

定義 付録 B.4. $D_R := \Phi(\sum \gamma^i \rtimes e_i) = \gamma^a \otimes R_a + \gamma^a \sigma_a \otimes 1$

つまり生成元を取替えてディラック作用素を作ると cubic term $\gamma^a \sigma_a \otimes 1$ が自然に現れた．残念ながら, このままでは, これは 4 章の cubic Dirac 作用素 D_0 とは cubic term の係数が違う．しかし, 明らかに次が成り立つ．

補題 付録 B.5. $D_0 = \frac{2}{3} D_L + \frac{1}{3} D_R$.

これが一つの理解の仕方であるが, なぜこのような D_0 を使うのか, D_L および D_R を使うにしても, なぜこのような係数でたし合わせた物を考えるのかということについては, まだ答えていない．これに対する答えとして, 代数的な意味付けを一言で書くと次のようになる．

命題 付録 B.6. $t \in [0.1]$ に対して $(1-t)D_L + tD_R$ を考え, $\mathcal{W}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 上に $[(1-t)D_L + tD_R, -]_s$ で作用させる．このとき, これが $[(1-t)D_L + tD_R, [(1-t)D_L + tD_R, -]_s, -]_s = 0$ を満たすのは $t = \frac{1}{3}$ の時に限る．ここで, $[-,-]_s$ はスパーブラケットである．

計算すれば分かることであるが, $[(1-t)D_L + tD_R, [(1-t)D_L + tD_R, -]_s, -]_s = [((1-t)D_L + tD_R)^2, -]$ が成り立っていることを注意しておこう．$d := [D_0, -]_s$ とおくと $d^2 = 0$ で, 非可換 Weil 代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 上に微分代数の構造を定めたことになる．

付録 C　Borel-Weil-Bott の定理

Borel-Weil-Bott の定理について述べる．Borel-Weil の定理を仮定した上で証明も与える．通常は旗多様体に複素構造を入れて考えるが, ここではスピン構造を利用した場合を経由した証明を試みる．それぞれを Holomorphic induction version 及び Dirac induction version と呼ぶ．まず, 旗多様体上の複素構造とスピン構造を比較しておこう．

以下, G を連結コンパクト半単純リー群とする．極大トーラス T を一つ固定する．このとき, G の普遍被覆群 $\tilde{G}$ 及び中心で割った群 $\underline{G}$ を考えると, これらの群の極大トーラス $\tilde{T}$ および $\underline{T}$ が引き戻しおよび中心で割るという操作によって取れる．このとき, 旗多様体を $\mathfrak{O} := G/T$ で定義すると, これは G 空間であるが, $\mathfrak{O} \cong \underline{G}/\underline{T}$ であることに注意すると, $\underline{G}$ 作用を経由して G 作用していることが分かる．

G 及び T のリー環として, リー環 $\mathfrak{g}$ とその極大トーラス $\mathfrak{t}$ が決まり, 複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に関して $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ なる直交分解がある (キリング形式に対して). ここで $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ である. さて, $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{t}$ の一次元表現に分解するのだが (ルート分解), G によるアジョイント作用が $\underline{G}$ によるアジョイント作用を経由することに注意しておくと, $\mathfrak{n}$ の $\mathfrak{t}$ による一次元表現としての分解は, $\underline{T}$ のそれに持ち上がる. よって T のそれにも持ち上がる. 各表現は $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} := i\mathfrak{t}^*$ の元とみなせ, ルートと呼び, その全体を $\Delta \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ と書く (ルートの集合). ここで, Δ は $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ への -1 倍という作用で閉じており, これで割った空間を $\Delta/2$ と書こう. $\Delta \to \Delta/2$ のセクション s に対して, $s(\Delta/2) \subset \Delta$ に属する元全部の和の半分を $\rho_s \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ と書くと, これは, $\mathfrak{t}$ の一次元表現を定めるのでこれを $\mathbb{C}_{\rho_s}$ と書く. しかしながら, 一般には, これは T の (あるいは $\underline{T}$ の) 一次元表現に持ち上がらない. そこで, アジョイント表現 $G \to SO(\mathfrak{g})$ に対して, $1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to Spin(\mathfrak{g}) \to SO(\mathfrak{g}) \to 1$ を使って, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ による中心拡大をとる. それを $\widehat{G}$ と書く (本文では, g^* を用いたが, $g = \mathcal{B}$ を用いて $\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}$ を同一視できるので, できた群は同じである). アジョイント表現は $\underline{G}$ を経由していたから, $\widehat{(\underline{G})}$ を経由して $Spin(\mathfrak{g})$ に表現される. これらに対しても元の極大トーラスを引き戻したり押し出したりして, $\widehat{T}$ 及び $\widehat{(\underline{T})}$ が得られる. これらは連結とは限らない (例えば, G が単連結なら $\widehat{T}$ は連結でない). ともかく, $\widehat{T}$ 及び $\widehat{(\underline{T})}$ の表現には $\mathfrak{t}$ の一次元表現 $\mathbb{C}_{\rho_s}$ が持ち上がり, やはり $\mathbb{C}_{\rho_s}$ と書く. $\Delta \to \Delta/2$ のセクション全体を Σ と書いておく.

$\mathfrak{O} := G/T$ を旗多様体と言う. $\mathfrak{O}$ は $\widetilde{G}$ 同変スピン構造をただ一つ持つので, これに付随する $\mathfrak{O}$ 上のスピンベクトル束を $S\mathfrak{O}$ と書く. これは, $\widehat{G}$ 同変ベクトル束とみなせ, これは $\widehat{G}$ 同変複素ベクトル束として次のように書ける. $S\mathfrak{O} \cong \widehat{G} \times_{\widehat{T}} \bigoplus_{s\in\Sigma} \mathbb{C}_{\rho_s}$. 今, $L_{\rho_s} := \widehat{G} \times_{\widehat{T}} \mathbb{C}_{\rho_s}$ と定義すると, $S\mathfrak{O} \cong \bigoplus_{s\in\Sigma} L_{\rho_s}$ とも書ける. セクション s_0 を一つ固定して考えると, $\bigoplus_{s\in\Sigma} \mathbb{C}_{\rho_s} = \bigwedge(\bigoplus_{\alpha\in s_0(\Delta/2)} \mathbb{C}_{-\alpha}) \otimes \mathbb{C}_{\rho_{s_0}}$ と書けるので, $S\mathfrak{O} \cong (\widehat{G} \times_{\widehat{T}} \bigwedge(\bigoplus_{\alpha\in s_0(\Delta/2)} \mathbb{C}_{-\alpha})) \otimes L_{\rho_{s_0}}$ とも書ける.

$G_{\mathbb{C}}$ を G の複素化とし, その Borel 部分群 $T \subset B_- \subset G_{\mathbb{C}}$ をとる. すると, 複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に関して $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{h} \oplus n_- \oplus n_+ = \mathfrak{b}_- \oplus \mathfrak{n}_+$ なる分解がある. ここで $\mathfrak{n} = n_- \oplus n_+$ であり, $b_- = \mathfrak{h} \oplus n_-$ は B_- のリー環である. ポジティブルートの集合 Δ_+ やそれらの和の半分 ρ などが決まる事を注意しておく ($\mathfrak{n}_+ \cong \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}_\alpha$ 及び $\mathfrak{n}_- \cong \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}_{-\alpha}$). 上記の文脈で言うと, Δ_+ はある切断 $s \in \Sigma$ の像であり, その切断に付随する ρ_s が ρ である.

$\mathfrak{O}$ 上に複素構造, さらにケーラー構造が $\mathfrak{O} \cong G_{\mathbb{C}}/B_-$ により定まる. この複素構造を考えているときは, $\mathfrak{O}$ の代わりに, $\mathfrak{O}_\rho$ と書くことにする. このとき, $T\mathfrak{O} \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}\mathfrak{O}_\rho \oplus T^{0,1}\mathfrak{O}_\rho$ なる極分解が $\mathfrak{O}_\rho$ の複素構造から決まる. これは, $T\mathfrak{O} \cong G \times_T \mathfrak{n}$, $T^{1,0}\mathfrak{O}_\rho \cong G \times_T \mathfrak{n}_+$ 及び $T^{0,1}\mathfrak{O}_\rho \cong G \times_T \mathfrak{n}_-$ と思える. 従って, $T^{1,0}\mathfrak{O}_\rho \cong G \times_T \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}_\alpha$ 及び $T^{0,1}\mathfrak{O}_\rho \cong G \times_T \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}_{-\alpha}$ となっている. 従って, $\bigwedge T^{0,1}\mathfrak{O}_\rho \cong G \times_T \bigwedge(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}_{-\alpha})$ である. 以上から次が分かる.

命題 付録 C.1. $\widehat{G}$ 同変複素ベクトル束として, 次は同型である.

$$S\mathfrak{O} \cong \bigwedge T^*\mathfrak{O}_\rho \otimes L_\rho \cong \widehat{G} \times_{\widehat{T}} \bigwedge(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}_{-\alpha}) \otimes \mathbb{C}_\rho.$$

注意 付録 C.2. 一般に, 多様体 M の概複素構造はスピン ^{c} 構造を誘導することに注意する. このスピン ^{c} 構造に付随するスピンベクトル束は, 局所的に見るとスピン構造に付随するスピンベクトル束を 1 次元直線束 $\det^{1/2} T^{0,1}M$ で捻ったものになっている. 言い方を変えると, このスピン ^{c} 構造に付随するスピンベクトル束を 1 次元直線束 $\det^{1/2} T^{1,0}M$ で捻ればスピン構造に付随するスピンベクトル束が得られることを意味する (局所的な話). ケーラー多様体から始めたならば, $\det^{1/2} T^{1,0}M$ 係数のドルボー作用素とスピン構造によるディラック作用素は一致する (局所的な話).

上記命題は, B_- の取り方によって, $\mathfrak{O}$ にはケーラー構造が決まり, これに付随する $\bigwedge T^{0,1}\mathfrak{O}_\rho$ は, G 同変束としては互いに異なりうるにもかかわらず, $\widehat{G}$ 同変束 $\det^{1/2} T^{1,0}\mathfrak{O}_\rho \cong L_\rho$ をテンソルした後では, $\widehat{G}$ 同変束として $S\mathfrak{O}$ という B_- を使わずに定義されるものと一致することを意味しているので, $\det^{1/2} T^{1,0}\mathfrak{O}_\rho$ 係数のドルボー作用素とスピン構造によるディラック作用素の核は (もちろん指数も) $\widehat{G}$ 表現として一致する.

Borel-Weil の定理を思い出そう (証明は [18] などを参照せよ).

定理 付録 C.3 (Borel-Weil の定理)**.** 極大トーラス $T \subset G$ と Borel 部分群 $T \subset B_- \subset G_{\mathbb{C}}$ を取る. このとき T の表現に持ち上がる $-\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ が, ρ に関して anti-dominant であることと, $H^0(\mathfrak{O}_\rho, L_{-\lambda}) \neq 0$ は同値. ここで, $L_{-\lambda} := G \times_T \mathbb{C}_{-\lambda}$. さらにこのとき, $H^0(\mathfrak{O}_\rho, L_{-\lambda})$ は ρ に関する最低ウェイト $-\lambda$ の G の既約表現になっている.

系 付録 C.4. $\mathfrak{O}_\rho$ 上の $L_{-\lambda}$ 係数ドルボー作用素の定義域を $L_{-\lambda} \subset \bigwedge T^{0,1}\mathfrak{O}_\rho \otimes L_{-\lambda}$ の切断の空間に制限したとき, この核が非自明になるのは T の表現に持ち上がる $-\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ が ρ に関して, anti-dominant の時のみであり, このとき, 核は ρ に関する最低ウェイト $-\lambda$ の G の既約表現になっている.

$S\mathfrak{O} \cong \bigoplus_{s\in\Sigma} L_{\rho_s}$ であったことや, ドルボー作用素とディラック作用素の関係に気をつけると, 上の系は次のように言い換えられる.

系 付録 C.5. $\widehat{T}$ の表現に持ち上がる $\nu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ をとる. $\mathfrak{O}$ 上の L_ν 係数ディラック作用素の定義域を $L_{\rho+\nu} \subset S\mathfrak{O} \otimes L_\nu$ の切断の空間に制限したとき, この核が非自明になるのは $\rho+\nu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ が ρ に関して, anti-dominant の時のみであり, このとき, 核は ρ に関する最低ウェイト $\rho+\nu$ の G の既約表現になっている.

Borel-Weil-Bott の定理の Dirac induction version を証明する.

定理 付録 C.6 (Dirac induction)**.** 極大トーラス $T \subset G$ を固定する. $\widehat{T}$ の表現に持ち上がる regular なウェイト $\nu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ を取る. $\mathfrak{O}$ 上の L_ν で捻ったスピンベクトル束 $S \otimes L_\nu$ を考える. この時, これに付随する Dirac 作用素の核は $\rho' + \nu$ が ρ' に関する最低ウェイトとなるような G の既約表現である. ここで, ρ' は次を満たすものとして一意に決まるものである. すなわち, ν が ρ' に関して anti-dominant になる.

証明. ν が regular より, 一意的な ρ' があって, それに関して ν は anti-dominant になるように取れるのは明らかである. このとき, 前の系よりこの定理は明らかである. □

最後に, 通常の Borel-Weil-Bott の定理を証明しよう. $\widehat{T}$ の表現に持ち上がる regular なウェイト $\nu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ を取るということは, regular なウェイト $\nu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ であって, $\rho+\nu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ が T の表現に持ち上がるものを取ることと同値であることに注意する.

定理 付録 C.7 (Holomorphic induction)**.** 極大トーラス $T \subset G$ と Borel 部分群 $T \subset B_- \subset G_{\mathbb{C}}$ を取る. regular なウェイト $\nu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ であって, $\rho+\nu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ が T の表現に持ち上がるものを取る. $\mathfrak{O}$ 上の複素ベクトル束 $\bigwedge T^{0,1}\mathfrak{O}_\rho \otimes L_{\rho+\nu}$ を考える. ここで, $L_{\rho+\nu} := G \times_T \mathbb{C}_{\rho+\nu}$. このとき, ワイル群の元 $w \in W(T) := N(T)/T$ を $\rho + w(\nu)$ が ρ に関して, anti-dominant になるように取ると, 一意的に w は取れて, $H^*(\mathfrak{O}_\rho, L_{\rho+\nu}) = H^{l(w)}(\mathfrak{O}_\rho, L_{\rho+\nu}) \neq 0$ となり, これは ρ に関する最低ウェイト $\rho + w(\nu)$ の G の既約表現になっている. ここで $l(w)$ はワイル群に定まる標準的な語距離での w の長さである.

証明. $L_{\rho+\nu}$ 係数の $\mathfrak{O}_\rho$ 上のドルボー作用素は, L_ν 係数の $\mathfrak{O}$ 上のディラック作用素であった. これは, 前定理からある一意的な ρ' を取ったあとで, $L_{\rho'+\nu}$ の切断上を除いては核は自明であった. $L_{\rho'+\nu}$ が $\bigwedge T^{0,1}\mathfrak{O}_\rho \otimes L_{\rho+\nu}$ のどの次数のところに対応するかを見ればよい. $L_{\rho'+\nu}$ を ρ とワイル群の元を使って書き表そう. $\mathfrak{O}$ の複素構造は $B_- \supset T$ の取り方に依存していた. しかし任意のボレル部分群 $B'_- \supset T$ (これに付随するポジティブウェイト全部の半分の和なども $'$ をつけて書く) はワイル群の唯一の元 w で, $B'_- = wB_-w^{-1}$ と書けた. このとき, $\rho' = w^{-1}(\rho)$ であるから, $\rho' + \nu = w^{-1}(\rho + w(\nu))$ となっている. $L_{w^{-1}(\rho)+\nu}$ は, $\bigwedge T^{0,1}\mathfrak{O}_\rho \otimes L_{\rho+\nu}$ ののどの次数にいるかを考えると ρ に $-\alpha(\alpha \in \Delta_+)$ をいくつ足すことで $w^{-1}(\rho)$ が得られるかを考えることになり, これは $l(w) = l(w^{-1})$ に他ならない. □

参考文献

[1] Alekseev, A.; Meinrenken, E., The non-commutative Weil algebra. Invent. Math. 139 (2000), no. 1, 135–172.

[2] Atiyah, M. F. K-theory. Notes by D. W. Anderson. Second edition. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989. xx+216 pp

[3] Atiyah, Michael ; Segal, Graeme . Twisted K-theory. Ukr. Mat. Visn. 1 (2004), no. 3, 287–330; translation in Ukr. Math. Bull. 1 (2004), no. 3, 291–334

[4] Atiyah, Michael; Segal, Graeme, Twisted K-theory and cohomology. Inspired by S. S. Chern, 5–43, Nankai Tracts Math., 11, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[5] Carey, Alan L.; Wang, Bai-Ling, Thom isomorphism and push-forward map in twisted K-theory. J. K-Theory 1 (2008), no. 2, 357–393.

[6] Freed, Daniel S., The Verlinde algebra is twisted equivariant K-theory. Turkish J. Math. 25 (2001), no. 1, 159–167.

[7] Freed, Daniel S., Twisted K-theory and loop groups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002), 419–430, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[8] Freed, Daniel S.; Hopkins, Michael J.; Teleman, Constantin, Twisted equivariant K-theory with complex coefficients. J. Topol. 1 (2008), no. 1, 16–44.

[9] Freed, Daniel S.; Hopkins, Michael J.; Teleman, Constantin, Loop groups and twisted K-theory III. arXiv:math/0312155.

[10] Freed, Daniel S.; Hopkins, Michael J.; Teleman, Constantin, Loop groups and twisted K-theory II. arXiv:math/0511232.

[11] Freed, Daniel S.; Hopkins, Michael J.; Teleman, Constantin, Loop groups and twisted K-theory I. arXiv:0711.1906.

[12] Gomi, Kiyonori, Extended Topological Quantum Field Theory: a toy model. Lecture at Kinosaki. http://insei.math.kyoto-u.ac.jp/2007/proceeding/gomi.pdf

[13] Gomi, Kiyonori, An approach toward a finite-dimensional definition of twisted K-theory. Travaux mathe'matiques. Vol. XVII, 75–85, Trav. Math., 17, Fac. Sci. Technol. Commun. Univ. Luxemb., Luxembourg, 2007.

[14] Helgason, Sigurdur, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Corrected reprint of the 1978 original. Graduate Studies in Mathematics, 34. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. xxvi+641 pp.

[15] Higson, Nigel, K-theory of representations. Lecture at Vanderbilt university.

[16] Huang, Jing-Song; Pandzic', Pavle, Dirac operators in representation theory. Mathematics: Theory & Applications. Birkha"user Boston, Inc., Boston, MA, 2006. xii+199 pp.

[17] Khesin, Boris A.; Wendt, Robert, The geometry of infinite-dimensional Groups,

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 51. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[18] 小林 俊行; 大島 利雄, リー群と表現論. 岩波書店. 2005 年.

[19] Pressley, Andrew; Segal, Graeme, Loop groups. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986. viii+318 pp.